Entwicklung und Anwendung eines gefilterten Integrationsverfahrens für die Vorausberechnung atmosphärischer Felder

DIETER FRÜHWALD

1968

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546010_0014

Entwicklung und Anwendung eines gefilterten Integrationsverfahrens für die Vorausberechnung atmosphärischer Felder

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt
von

Dieter Frühwald
aus Veitsbronn bei Fürth/Bay

München
Juni 1968

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Prof. Dr. G. H o l l m a n n

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. M ö l l e r

Tag der mündlichen Prüfung: 24.7.1968

DISSERTATIONS- UND FOTODRUCK FRANK · 8 München 13 · Telefon 597 397 [52 46 07]

Inhaltsverzeichnis

		Seite
	Zusammenfassung	I
	Verzeichnis der verwendeten Symbole	II
1.	Einleitung	1
2.	Ableitung der verwendeten Gleichungen	1
3.	Eigenschaften des balancierten Geschwindigkeitsfeldes	3
4.	Die ϕ_t - Gleichung	6
5.	Das Elliptizitätskriterium der ϕ_t - Gleichung	8
6.	Modellannahmen	10
7.	Randbedingungen	12
8.	Differenzengleichungen und Lösungsverfahren	14
9.	Ergebnisse	18
9.1.	Geopotentialfeld mit barotroper Störung	18
9.2.	Geopotentialfeld mit barokliner Störung	22
9.3.	Einfluß der Randbedingungen	23
9.4.	Einfluß des breitenabhängigen Coriolis-Parameters	25
10.	Ergebnisse einer 24-stündigen Vorhersage	26
11.	Schlußbemerkung	30
	Abbildungen	32
	Literaturverzeichnis	47
	Lebenslauf	50

Zusammenfassung

Die Vernachlässigung von $\frac{d^2v}{dt^2}$ in der individuell nach der Zeit abgeleiteten horizontalen Bewegungsgleichung führt nach F j ö r t o f t zu Balancegleichungen der Form $\omega_3 = f(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t})$. Diese machen die Berechnung eines divergent balancierten Geschwindigkeitsfeldes aus dem Geopotential- und Isallobarenfeld möglich. Das $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ -Feld muss jedoch zuvor aus dem ϕ -Feld durch Lösung einer partiellen Differentialgleichung in $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ vom elliptischen Typ beschafft werden. Dazu ist die Vorgabe geeigneter Randbedingungen notwendig.

Diese Methode der Balancierung wird in einer baroklinen Modellatmosphäre (Neun-Schichten-Modell) erprobt. Insbesondere wird der Einfluss der Randbedingungen auf die Lösung $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ des obigen Randwertproblemes und damit auch auf das Geschwindigkeitsfeld ω_3 untersucht. Das balancierte Geschwindigkeitsfeld zeigt eine deutliche Asymmetrie zwischen Hoch und Tief. Vorzeichen und Betrag der balancierten Geschwindigkeitskomponenten stimmen überein mit den meteorologischen Vorstellungen.

Weiterhin wird mit Hilfe der oben erwähnten elliptischen $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ - Gleichung, die eine prognostische Gleichung für das Geopotential ϕ ist, eine 24-stündige Vorhersage erstellt. Die anfangs in den einzelnen Druckflächen nahezu symmetrische $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ -Verteilung zeigt nach 24 Stunden kräftige Asymmetrie zwischen Hoch und Tief. Auch die Asymmetrie des balancierten Geschwindigkeitsfeldes nimmt zu. In Bodennähe entwickelt sich das Hoch gegenüber dem Tief ein klein wenig stärker. Eine parallel dazu mit dem geostrophisch approximierten E r t e lschen Wirbelsatz durchgeführte Vorhersage liefert dagegen über den ganzen Vorhersagezeitraum zwischen Hoch und Tief vollkommene Symmetrie des $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ -Feldes und eine symmetrische Entwicklung der Druckgebilde.

Verzeichnis der verwendeten Symbole

$v_3 \equiv (u,v,\omega)$	dreidimensionaler Geschwindigkeitsvektor
$v \equiv (u,v)$	horizontaler Geschwindigkeitsvektor
$\omega = \frac{dp}{dt}$	generalisierte Vertikalbewegung
ϕ	Geopotential der isobaren Flächen
g	Erdbeschleunigung
c	Phasengeschwindigkeit
f	Coriolis-Parameter
$\beta = \frac{df}{dy}$	Rossby-Parameter
$v_g = \frac{1}{f} k \times \nabla \phi$	geostrophischer Wind $\quad v_g \equiv (u_g, v_g)$
ζ, $\eta = \zeta + f$	relative Vorticity, absolute Vorticity
$\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$	Tendenz des Geopotentialfeldes
ρ, T, Θ	Dichte, absolute Temperatur, potentielle Temp.
σ	hydrostatische Stabilität
$M = \phi + c_p T$	Montgomery-Potential
$R_o = \frac{V}{fL}$	Rossby-Zahl
$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$	vertikaler Temperaturgradient
$\mathrm{Det}\, A$	Determinante der Matrix A
p	vertikale Druckkoordinate
k	vertikaler Einheitsvektor
t	Zeit
$\nabla \equiv$	$\left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} \right)$
$\nabla_3 \equiv$	$\left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} , \frac{\partial}{\partial p} \right)$
$\nabla \cdot v$	Divergenz des horizontalen Geschwindigkeitsvektors
	x - Achse $\rightarrow$ E, y - Achse $\rightarrow$ N
$w = \frac{dz}{dt}$	Vertikalgeschwindigkeit im z-System
c_p	spez. Wärme bei konst. Druck

1. Einleitung

In zunehmendem Maße ist man bestrebt, für die numerische Wettervorhersage die primitiven Gleichungen zu verwenden. Um den Einfluß der meteorologischen Lärmvorgänge während der Prognose zu reduzieren, ist jedoch die Kenntnis eines balancierten Geschwindigkeitsfeldes zum Anfangszeitpunkt erforderlich.

Die bisherigen Balancierungsmethoden beschränkten sich meist auf den zweidimensionalen Fall, d.h. die Balancegleichungen lieferten nur die x- und y-Komponente des Geschwindigkeitsvektors [1-7] . In den Arbeiten von R e i s e r und S c h a n z [8] , sowie K o r b [7] wurde für das Modell einer homogen inkompressiblen Flüssigkeit mit freier Oberfläche unter anderem auch die Balancierungsmethode nach F j ö r t o f t [9],[10] untersucht. Diese Balancierungsmethode soll nun im folgenden auf eine barokline Modellatmosphäre angewendet werden.

2. Ableitung der verwendeten Gleichungen

Die horizontale Bewegungsgleichung im p-System

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\phi - f\vec{k}\times\vec{v} \qquad \text{mit} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_3\nabla_3 \quad (1)$$

wird individuell nach der Zeit differenziert. Man erhält

$$\frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = -\frac{d}{dt}(\nabla\phi) - \beta v\vec{k}\times\vec{v} - f\vec{k}\times\frac{d\vec{v}}{dt}$$

und daraus nach Einsetzen der rechten Seite von (1) an Stelle der Beschleunigung $\frac{d\vec{v}}{dt}$ die Gleichung

$$\frac{d^2\vec{v}}{dt^2} = -\frac{d}{dt}(\nabla\phi) - \beta v\vec{k}\times\vec{v} + f\vec{k}\times\nabla\phi - f^2\vec{v} \quad . \qquad (2)$$

Vernachlässigt man nach F j ö r t o f t [9] die Terme $\frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$ und $\beta v\vec{k}\times\vec{v}$, so ergeben sich in Komponentenschreibweise die beiden Gleichungen

$$(f^2+\phi_{xx})u + \phi_{xy}v + \phi_{xp}\omega = -\phi_{tx} - f\phi_y \qquad (3)$$

$$\phi_{xy}u + (f^2+\phi_{yy})v + \phi_{yp}\omega = -\phi_{ty} + f\phi_x \quad . \qquad (4)$$

Zusammen mit der thermodynamischen Gleichung

$$\Phi_{xp}\,u + \Phi_{yp}\,v + \sigma\,\omega = -\Phi_{tp} \tag{5}$$

bilden (3) und (4) ein lineares Gleichungssystem für die Geschwindigkeitskomponenten u,v,ω. In Matrizenschreibweise lautet es

$$\mathcal{A}\,w_3 = f^2\,(w_i + w_g) \tag{6}$$

mit $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} f^2+\Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xp} \\ \Phi_{xy} & f^2+\Phi_{yy} & \Phi_{yp} \\ \Phi_{xp} & \Phi_{yp} & \sigma \end{pmatrix}$

$w_i = -\frac{1}{f^2}\nabla_3\Phi_t = -\frac{1}{f^2}\begin{pmatrix}\Phi_{tx}\\ \Phi_{ty}\\ \Phi_{tp}\end{pmatrix}$ isallobarischer Wind

$w_g = \frac{1}{f}\,k\times\nabla\Phi = \frac{1}{f}\begin{pmatrix}-\Phi_y\\ \Phi_x\\ 0\end{pmatrix}$ geostrophischer Wind .

Für Det $\mathcal{A} \neq 0$ ist das Gleichungssystem (6) eindeutig auflösbar nach der Geschwindigkeit

$$w_3 = f^2\,\mathcal{A}^{-1}(w_i + w_g) = f^2\,\frac{\mathcal{A}_{adj.}}{DT}\,(w_i + w_g) \tag{7}$$

mit DT = Det $\mathcal{A} = \frac{1}{\sigma}\left(A_{11}A_{22} - A_{21}^2\right) = \frac{1}{f^2+\Phi_{yy}}\left(A_{11}A_{33} - A_{31}^2\right) = \frac{1}{f^2+\Phi_{xx}}\left(A_{22}A_{33} - A_{32}^2\right)$

$$\mathcal{A}_{adj.} = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$ wobei

$A_{11} = (f^2+\Phi_{yy})\sigma - (\Phi_{yp})^2$ $\quad A_{21} = \Phi_{xy}\,\sigma - \Phi_{xp}\,\Phi_{yp}$

$A_{22} = (f^2+\Phi_{xx})\sigma - (\Phi_{xp})^2$ $\quad A_{32} = (f^2+\Phi_{xx})\Phi_{yp} - \Phi_{xy}\,\Phi_{xp}$

$A_{33} = (f^2+\Phi_{xx})(f^2+\Phi_{yy}) - (\Phi_{xy})^2$ $\quad A_{31} = \Phi_{xy}\,\Phi_{yp} - \Phi_{xp}(f^2+\Phi_{yy})$

$\mathcal{A}_{adj.}$ ist die zu $\mathcal{A}$ adjungierte Matrix.
Die Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_{adj.}$ sind symmetrisch. Für die Determinanten gilt: Det $\mathcal{A}_{adj.}$ = (Det $\mathcal{A}$)^2 = DT^2 .
In Komponentenschreibweise geht (7) über in

$$u = \frac{1}{DT}\left\{(-\Phi_{tx} - f\Phi_y)A_{11} - (-\Phi_{ty} + f\Phi_x)A_{21} - \Phi_{tp}\,A_{31}\right\} \tag{8}$$

$$v = \frac{1}{DT}\left\{(\Phi_{tx} + f\Phi_y)A_{21} + (-\Phi_{ty} + f\Phi_x)A_{22} + \Phi_{tp}\,A_{32}\right\} \tag{9}$$

$$\omega = \frac{1}{DT}\left\{-(\Phi_{tx} + f\Phi_y)A_{31} - (-\Phi_{ty} + f\Phi_x)A_{32} - \Phi_{tp}A_{33}\right\} . \tag{10}$$

3. Eigenschaften des balancierten Geschwindigkeitsfeldes

Die Gleichungen (8)-(10) sind diagnostische Beziehungen für die Geschwindigkeitskomponenten u,v,ω. Diese diagnostischen Beziehungen der Form $w_3 = f(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t})$, deren Ableitung auf der Verwendung der Näherung $\frac{d^2 w}{dt^2} \approx 0$ beruht, wurden in der impliziten Fassung von (6) erstmals von F j ö r t o f t [9], [10] angegeben. Durch eine Größenordnungsbetrachtung zeigte H o l l m a n n [11], daß es berechtigt ist, den Term $\frac{d^2 w}{dt^2}$ für $Ro \ll 1$ in (2) zu vernachlässigen. Der zweite in (2) vernachlässigte Term $\beta v \vec{k} \times \vec{w}$ ist größenordnungsmäßig nur in niedrigen Breiten von Bedeutung (vgl. H o l l m a n n [11]).
Mit Hilfe der linearisierten Grundgleichungen für die freie Oberfläche einer homogen inkompressiblen Flüssigkeit konnten v. H a s e l b e r g und H i n k e l m a n n [12] beweisen, daß ganz allgemein die Benutzung der Annahme $\frac{d^n w}{dt^n} \approx 0$ $(n=1,2,\ldots)$ zu einem Geschwindigkeitsfeld führt, das divergent balanciert ist. Somit stellen (8)-(10) ein dreidimensionales divergent balanciertes Geschwindigkeitsfeld für eine barokline Atmosphäre dar. Der hier behandelte Fall $n=2$ ist die erste Erweiterung gegenüber der geostrophischen Approximation $(n=1)$.

Die Verwendung der Näherung $\frac{d^2 w}{dt^2} \approx 0$ für das Modell einer homogen inkompressiblen Flüssigkeit mit freier Oberfläche mit $f=f_0=\text{const.}$ bedeutet, daß die P h i l i p p s sche Reihe [13] nach dem zweiten Glied abgebrochen wird [14]. Das zweidimensionale divergent balancierte Geschwindigkeitsfeld ist daher identisch mit dem P h i l i p p s schen Wind für $f=f_0=\text{const.}$

$$\vec{w} = \vec{w}_{g0} + \frac{1}{f_0} \vec{k} \times \frac{d \vec{w}_{g2}}{dt} \qquad \text{mit} \quad \vec{w}_{g0} = \frac{1}{f_0} \vec{k} \times \nabla \phi \quad , \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{w} \nabla \tag{11}$$

In Analogie dazu darf man den durch (8)-(10) gegebenen Geschwindigkeitsvektor w_3 als verallgemeinerten P h i l i p p s schen Wind für eine barokline Atmosphäre betrachten.

Eine andere Schreibweise für (8)-(10) bei jetzt kostantem Coriolisparameter $f=f_0$ ist

$$u = \frac{f_0^4}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma}\right)} \left\{ \left[u_{g0} - \frac{\phi_{xx}}{f_0^2} \right] \left[1 + \frac{\phi_{yy}}{f_0^2} - \frac{\phi_{xp}}{f_0^2} \left(\frac{\phi_{yp}}{\sigma} \right) \right] - \frac{\phi_{xy}}{f_0^2} \left[v_{g0} - \frac{\phi_{xy}}{f_0^2} \right] \left[1 - \frac{\phi_{xp}}{\phi_{xy}} \left(\frac{\phi_{yp}}{\sigma} \right) \right] \right.$$
$$\left. + \frac{\phi_{xp}}{f_0^2} \left[\left(1 + \frac{\phi_{yy}}{f_0^2} \right) \left(\frac{\phi_{xp}}{\sigma} \right) - \frac{\phi_{xy}}{f_0^2} \left(\frac{\phi_{yp}}{\sigma} \right) \right] \right\} \tag{12}$$

$$v = \frac{f_o^4}{\left(\frac{DT}{\sigma}\right)}\left\{\left[v_{g_0} - \frac{\phi_{ty}}{f_o^2}\right]\left[1 + \frac{\phi_{xx}}{f_o^2} - \frac{\phi_{xp}}{f_o^2}\left(\frac{\phi_{xp}}{\sigma}\right)\right] - \frac{\phi_{xy}}{f_o^2}\left[u_{g_0} - \frac{\phi_{tx}}{f_o^2}\right]\left[1 - \frac{\phi_{xp}}{\phi_{xy}}\left(\frac{\phi_{xp}}{\sigma}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\phi_{tp}}{f_o^2}\left[\left(1 + \frac{\phi_{xx}}{f_o^2}\right)\left(\frac{\phi_{yp}}{\sigma}\right) - \frac{\phi_{xy}}{f_o^2}\left(\frac{\phi_{xp}}{\sigma}\right)\right]\right\} \qquad (13)$$

$$\omega = \frac{f_o^4}{\left(\frac{DT}{\sigma}\right)}\left\{\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\,\omega_g + \left(\frac{\phi_{xp}}{\sigma}\right)\left[\left(1 + \frac{\phi_{yy}}{f_o^2}\right)\frac{\phi_{tx}}{f_o^2} - \frac{\phi_{xy}\,\phi_{ty}}{f_o^4} - \frac{\phi_{yy}}{f_o^2}u_g + \frac{\phi_{xy}}{f_o^2}v_g\right]\right.$$
$$+ \left(\frac{\phi_{yp}}{\sigma}\right)\left[\left(1 + \frac{\phi_{xx}}{f_o^2}\right)\frac{\phi_{ty}}{f_o^2} - \frac{\phi_{xy}\,\phi_{tx}}{f_o^4} - \frac{\phi_{xx}}{f_o^2}v_g + \frac{\phi_{xy}}{f_o^2}u_g\right] \qquad (14)$$
$$\left. - \left(\frac{\phi_{tp}}{\sigma}\right)\left[\frac{\nabla^2\phi}{f_o^2} - \frac{\phi_{xy}^2}{f_o^4} + \frac{\phi_{xx}\cdot\phi_{yy}}{f_o^4}\right]\right\}$$

mit $\omega_g = -\frac{1}{\bar{\sigma}}\left(\phi_{pt} + u_{g_0}\phi_{xp} + v_{g_0}\phi_{yp}\right)$

$\bar{\sigma}$ Flächenmittel von σ.

Setzt man in (12) und (13) $\phi_{xp} = 0$, $\phi_{yp} = 0$, $\phi_{tp} = 0$ und substituiert weiterhin $\frac{DT}{\sigma}$ durch

$$DT^* = \left(f_o^2 + \phi_{xx}\right)\cdot\left(f_o^2 + \phi_{yy}\right) - \left(\phi_{xy}\right)^2 \quad ,$$

so gehen (12) und (13) über in

$$u = \frac{f_o^4}{DT^*}\left\{u_{g_0}\left[1 + \frac{\phi_{yy}}{f_o^2}\right] - v_{g_0}\frac{\phi_{xy}}{f_o^2} - \frac{\phi_{tx}}{f_o^2}\left[1 + \frac{\phi_{yy}}{f_o^2}\right] + \frac{\phi_{ty}}{f_o^2}\cdot\frac{\phi_{xy}}{f_o^2}\right. \qquad (15)$$

$$v = \frac{f_o^4}{DT^*}\left\{v_{g_0}\left[1 + \frac{\phi_{xx}}{f_o^2}\right] - u_{g_0}\frac{\phi_{xy}}{f_o^2} - \frac{\phi_{ty}}{f_o^2}\left[1 + \frac{\phi_{xx}}{f_o^2}\right] + \frac{\phi_{tx}}{f_o^2}\cdot\frac{\phi_{xy}}{f_o^2}\right. \quad . \qquad (16)$$

Die Gleichungen (15) und (16) sind identisch mit dem unter der Annahme $\frac{d^2v}{dt^2} \approx 0$ aus der horizontalen Bewegungsgleichung abgeleiteten zweidimensionalen divergent balancierten Geschwindigkeitsfeld für das Modell einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit mit freier Oberfläche (vgl. K o r b [7]). Damit ist der Zusammenhang zwischen den balancierten Geschwindigkeitsfeldern des baroklinen und barotropen Falles aufgezeigt.

Mit den Annahmen

$$\frac{|\phi_{xx}|}{f_o^2} \ll 1\,,\quad \frac{|\phi_{yy}|}{f_o^2} \ll 1\,,\quad \frac{|\phi_{xy}|}{f_o^2} \ll 1 \qquad (17)$$

die für $R_o \ll 1$ gelten, vereinfachen sich (15) und (16) zu

$$u = u_{g0} - v_{g0}\frac{\phi_{xy}}{f_0^2} - \frac{\phi_{tx}}{f_0^2} + \frac{\phi_{ty}\cdot\phi_{xy}}{f_0^4} \qquad (18)$$

$$v = v_{g0} - u_{g0}\frac{\phi_{xy}}{f_0^2} - \frac{\phi_{ty}}{f_0^2} + \frac{\phi_{tx}\cdot\phi_{xy}}{f_0^4} \quad . \qquad (19)$$

Die Gleichungen (18) und (19) - jedoch ohne den jeweils letzten Term der rechten Seite - erhält man auch aus (11), wenn man

$$\frac{dv_{g0}}{dt} \approx \frac{\partial v_{g0}}{\partial t} + v_{g0}\nabla v_{g0}\,, \quad \frac{|\phi_{xx}|}{f_0^2} \ll 1\,, \quad \frac{|\phi_{yy}|}{f_0^2} \ll 1$$

voraussetzt.

Mit der Approximation (sog. erweiterte B r u n t - D o u g l a s - Näherung [34])

$$\frac{dv_{g0}}{dt} \approx \frac{\partial v_{g0}}{\partial t} + v_{g0}\nabla v_{g0}$$

kann der P h i l i p p s sche Wind (11) geschrieben werden als

$$v_{ph} = \left(1 - \frac{\nabla^2\phi}{f_0^2}\right)v_{g0} + \frac{1}{2f_0^2}\,k \times \nabla(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{f_0^2}\,\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad (20)$$

Damit läßt sich dann (14) überführen in

$$\begin{aligned}\omega = \frac{f_0^4}{\left(\frac{\partial\tau}{\partial p}\right)}\Bigg\{ & \frac{\bar{\sigma}}{\sigma}\omega_g - \left(\frac{\phi_{xp}}{\sigma}\right)\left[u_{ph} - u_g\left(1 - \frac{\nabla^2\phi}{f_0^2}\right) - \frac{\phi_{yy}\cdot\phi_{tx}}{f_0^4} + \frac{\phi_{xy}\cdot\phi_{ty}}{f_0^4}\right] \\ & - \left(\frac{\phi_{yp}}{\sigma}\right)\left[v_{ph} - v_g\left(1 - \frac{\nabla^2\phi}{f_0^2}\right) - \frac{\phi_{xx}\cdot\phi_{ty}}{f_0^4} + \frac{\phi_{xy}\cdot\phi_{tx}}{f_0^4}\right] \\ & - \left(\frac{\phi_{tp}}{\sigma}\right)\left[\frac{\nabla^2\phi}{f_0^2} - \frac{\phi_{xy}^2}{f_0^4} + \frac{\phi_{xx}\cdot\phi_{yy}}{f_0^4}\right]\Bigg\} \quad . \end{aligned} \qquad (21)$$

Aus (12),(13),(14) bzw. (18),(19),(21) kann man entnehmen, in welcher Weise die drei balancierten Geschwindigkeitskomponenten u,v,ω eine Erweiterung der entsprechenden geostrophischen Komponenten sind. Die Abweichungen vom geostrophischen Wind sind hauptsächlich von den Termen ϕ_{xx}, ϕ_{yy}; ϕ_{xp}, ϕ_{yp}; ϕ_{tx} ϕ_{ty}, ϕ_{tp} bestimmt. Diese Größen sind abhängig von der Verteilung der relativen Vorticity bzw. von der Baroklinität der Atmosphäre bzw. vom Isallobarenfeld. Besonders sei darauf hingewiesen, daß die balancierten Horizontalkomponenten u,v (vgl. (12),(13)) im Gegensatz zum P h i l i p p s schen Wind der Form (20) die Baroklinität der Atmosphäre berücksichtigen.

4. Die ϕ_t - Gleichung

Wenn man sich das balancierte Geschwindigkeitsfeld nach (8)-(10) beschaffen will, muß zuvor das ϕ_t -Feld berechnet werden. Dies geschieht durch Lösung einer im folgenden als ϕ_t -Gleichung bezeichneten partiellen Differentialgleichung in ϕ_t . Man erhält sie, indem man (8)-(10) in die Kontinuitätsgleichung des p-Systems

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \tag{22}$$

einsetzt. Die ϕ_t-Gleichung lautet dann

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial^2 \phi_t}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial \phi_t}{\partial x_i} = RS \tag{23}$$

mit $a_{ij} = a_{ji} = \alpha_{adj.}$ $\quad i, j = 1,2,3$

$x_1 = x$

$x_2 = y$

$x_3 = p$

$$b_1 = -\left[\frac{1}{\varkappa p} A_{31} + \frac{D\bar{T}_x A_{11} - D\bar{T}_y A_{21} + D\bar{T}_p A_{31}}{D\bar{T}}\right]$$

$$b_2 = \left[\frac{1}{\varkappa p} A_{32} + 2f\beta\sigma + \frac{D\bar{T}_x A_{21} - D\bar{T}_y A_{22} + D\bar{T}_p A_{32}}{D\bar{T}}\right]$$

$$b_3 = -\left[-2f\beta\phi_{yp} + \frac{D\bar{T}_x A_{31} - D\bar{T}_y A_{32} + D\bar{T}_p A_{33}}{D\bar{T}}\right]$$

$$RS = \beta(A_{21}\phi_y + A_{22}\phi_x) - f\phi_y b_1 + f\phi_x b_2 .$$

Die Gleichung (23) ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in ϕ_t . Die Koeffizienten a_{ij} und b_i, sowie die rechte Seite RS von (23) sind Funktionen des Geopotentialfeldes $\phi(x,y,p)$. Auf die Existenz von (23) hat erstmals F j ö r t — o f t [9], [10] hingewiesen.
Vom meteorologischen Standpunkt aus betrachtet, ist (23) eine prognostische Gleichung für ϕ . Sie stellt eine gefilterte Gleichung dar, d.h. bei der Verwendung als prognostische Gleichung läßt sie die Entwicklung von Lärmdivergenzen nicht zu. Wie im Falle der geostrophischen Modelle hat sich das meteorologische "Vielfeldproblem" auf ein "Einfeldproblem" reduziert.

Die Struktur von (23) legt einen Vergleich mit dem geostrophisch approximierten E r t e l schen Wirbelsatz [16] nahe. Dieser sei

in folgender Form gegeben

$$\left(\nabla^2 + f_0^2 \frac{\partial}{\partial p}\,\frac{\frac{\partial}{\partial p}}{\bar{\sigma}}\right)\frac{\partial \phi}{\partial t} = -J\left\{\phi, \frac{\nabla^2\phi}{f_0} + f + f_0\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial p}}{\bar{\sigma}}\right)\right\} \qquad (24)$$

mit $\bar{\sigma}(p)$ Flächenmittel von σ.

Die Ähnlichkeit von (23) und (24) soll an Hand der linearisierten Gleichungen gezeigt werden. Es werde angenommen:

$u = U(p) + u^*(x,p,t)$

$v = v^*(x,p,t)$

$\omega = \omega^*(x,p,t)$

$\phi = \bar{\phi}(y,p) + \phi^*(x,p,t)$

* Störungen der einzelnen Größen

$U(p) = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y}$ $\quad Q = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}$ $\quad f = f_0 = \text{const.}$

Aus den linearisierten Bewegungsgleichungen

$$Qu^* + \omega^* U_p = -\phi_x^* + fv^* \qquad (25)$$

$$Qv^* = -fu^* \quad , \qquad (26)$$

der linearisierten thermodynamischen Gleichung

$$Q\phi_p^* + v^*\bar{\phi}_{yp} + \sigma\omega^* = 0 \quad , \qquad (27)$$

sowie der linearisierten Kontinuitätsgleichung

$$u_x^* + \omega_p^* = 0 \qquad (28)$$

läßt sich unter Verwendung der Annahmen $Q^2u^* + Q(\omega^* U_p) \approx 0$ und $Q^2v^* \approx 0$ die der Gl. (23) entsprechende Gleichung für ϕ_t^* ableiten:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + f_0^2\frac{\partial}{\partial p}\,\frac{\frac{\partial}{\partial p}}{\sigma}\right)\frac{\partial \phi^*}{\partial t} = -U\phi_{xxx}^* - f_0^2 U\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\phi_{xp}^*}{\sigma}\right) + f_0^2\phi_x^*\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{U_p}{\sigma}\right). \qquad (29)$$

Durch einfache Manipulation findet man, daß auch der E r t e l sche Wirbelsatz (24) nach Linearisierung auf Gl. (29) führt.

Die ϕ_t - Gleichung darf somit als nichtgeostrophische Erweiterung des E r t e l schen Wirbelsatzes verstanden werden. Durch Größenordnungsbetrachtungen kann man unschwer zeigen, daß die nichtlinearisierte Gl. (23) die Gleichung (24) als Kern enthält.

Unterschiedliche Ergebnisse bei der Lösung von (23) gegenüber (24) müssen dem ageostrophischen Anteil in (8)-(10) zugeschrieben werden.

5. Das Elliptizitätskriterium der ϕ_t - Gleichung

Bei Vorgabe geeigneter Randbedingungen ist (23) als Randwertproblem lösbar, aber nur dann, wenn (23) vom elliptischen Typ ist, d.h. wenn die mit der Koeffizientenmatrix $a_{ij} = a_{ji} = \mathcal{A}_{adj.}$ gebildete quadratische Form

$$Q = \mathcal{X}^T \mathcal{A}_{adj.} \mathcal{X} \qquad \text{mit } \mathcal{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ p \end{pmatrix} , \quad \mathcal{X}^T = (x,y,p)$$

positiv definit ist. Gleichbedeutend damit ist, daß $\mathcal{A}_{adj.}$ positiv definit ist. Nach Z u r m ü h l [17] ist dafür notwendig und hinreichend, daß die drei Hauptabschnittsdeterminanten von $\mathcal{A}_{adj.}$ positiv sind, also

$$\begin{aligned} A_{11} &= (f^2 + \phi_{yy}) \cdot \sigma - (\phi_{yp})^2 > 0 \\ A_{11} \cdot A_{22} - A_{21}^2 &= DT \cdot \sigma > 0 \qquad (30) \\ \text{Det } \mathcal{A}_{adj.} &= DT^2 > 0 \ . \end{aligned}$$

Aus (30) folgt: $A_{22} > 0$ und $A_{33} > 0$. Die positiven Hauptdiagonalelemente A_{ii} (i=1,2,3) bedingen gleiches Vorzeichen für $\phi_{xx} + f^2$, $\phi_{yy} + f^2$, und σ . Der Fall mit negativem Vorzeichen kann ausgeschlossen werden, wie folgende Überlegung zeigt:

Wenn man die Näherung $\frac{d^2 z_0}{dt^2} \approx 0$ für die individuell nach der Zeit abgeleitete Bewegungsgleichung im θ - System benutzt, läßt sich zusammen mit der Kontinuitätsgleichung im θ - System eine der Gl. (23) entsprechende Gleichung für $\frac{\partial M}{\partial t}$ mit $M = \phi + c_p T$ (M o n t g o m e r y - Potential) ableiten. Ihre der Matrix a_{ij} entsprechende Koeffizientenmatrix ist

$$a'_{ij} = \begin{pmatrix} f^2 + M_{yy} & -M_{xy} & 0 \\ -M_{xy} & f^2 + M_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{(f^2+M_{xx})(f^2+M_{yy}) - (M_{xy})^2}{M_{\theta\theta}} \end{pmatrix} . \qquad (31)$$

Das dazugehörige Elliptizitätskriterium lautet

$$\begin{aligned} f^2 + M_{yy} &> 0 \\ (f^2+M_{xx})(f^2+M_{yy}) - (M_{xy})^2 &> 0 \\ -M_{\theta\theta} &> 0 \end{aligned} \qquad (32)$$

oder nach Transformation in das p-System

$$\begin{aligned} (f^2 + \phi_{yy}) - \frac{(\phi_{xy})^2}{\sigma} &> 0 \\ \frac{\partial \tau}{\sigma} &> 0 \\ \sigma &> 0 \quad . \end{aligned} \qquad (33)$$

Dieses letzte Kriterium (33) darf nun als Elliptizitätskriterium für die ϕ_t - Gleichung (23) verwendet werden, weil $\left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)_\theta = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)_p$ gilt. Die Forderung $\sigma > 0$ läßt (30) in (33) übergehen. Das Kriterium (33) kann leicht in die von R e i s e r und S c h a n z [8] angegebene Form überführt werden.
Die notwendige Bedingung für das Elliptizitätskriterium von (23)

$$A_{ii} > 0 \qquad i = 1,2,3$$

enthält in $A_{33} > 0$ das Elliptizitätskriterium für den barotropen Fall (vgl. K o r b [7]).
Aus $A_{11} > 0$ und $A_{22} > 0$ folgt

$$A_{11} + A_{22} > 0$$ und daraus mit $\sigma > 0$

$$\frac{\nabla^2 \phi}{f} + f > -f\left[1 - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial w_2}{\partial p}\right)^2\right] . \qquad (34)$$

Die Elliptizität der ϕ_t - Gleichung bedingt somit für $\frac{\nabla^2\phi}{f} + f$ eine untere Grenze, die abhängig ist vom Quadrat des Betrages des thermischen Windes und von der hydrostatischen Stabilität. Da im allgemeinen

$$\frac{\left(\frac{\partial v_g}{\partial p}\right)^2}{\sigma} < 1$$

gilt, kann in Hochdruckgebieten ($\nabla^2\phi < 0$) die Ungleichung (34) unter Umständen verletzt werden. Es muß daher damit gerechnet werden, daß in einem Strömungsfeld mit starker vertikaler Scherung des geostrophischen Windes die ϕ_t - Gleichung im Bereich von Antizyklonen hyperbolisch wird.

6. Modellannahmen

Die ϕ_t - Gleichung soll für das vorgegebene ϕ - Feld einer baroklinen Kanalströmung numerisch gelöst werden. Das dreidimensionale quaderförmige Integrationsgebiet liege in einem (x,y,p)-Koordinatensystem. Die horizontalen Abmessungen betragen

Kanallänge in x-Richtung	$L_x = 6 \cdot 10^6$ m
Kanalbreite in y-Richtung	$L_y = 3.6 \cdot 10^6$ m .

Die seitlichen Begrenzungsflächen sind die Ebenen

$$x = 0,\ x = x_0\ ,\ y = 0\ ,\ y = y_0 \qquad \text{(vgl. Abb.1).}$$

Der vertikale Aufbau der Atmosphäre wird durch zehn Druckflächen im Abstand von $\Delta p = 100$ mb repräsentiert (Neun-Schichten-Modell). Die Modellatmosphäre reicht damit von $p = 100$ mb bis $p = 1000$ mb (vgl. Abb. 1).

Sämtliche Funktionen werden bezüglich der x-Richtung als periodisch mit der Periode L_x angenommen, d.h.

$$f(x) = f(x+L_x)$$

Das Geopotentialfeld $\phi(x,y,p)$ für das obige Integrationsgebiet werde analytisch vorgegeben durch

$$\phi(x,y,p) = \bar{\phi}\left(\frac{y_0}{2}, p\right) - f_0 U(p)\left(y - \frac{y_0}{2}\right) + A(p)\sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right)\left[1 + \cos\frac{2\pi\left(y - \frac{y_0}{2}\right)}{L_y}\right] \quad (35)$$

(nach H i n k e l m a n n [27] und D e i s e n h o f e r [28])

mit $0 \leq x \leq x_o = 6 \cdot 10^6$ m $\qquad f_o = 1 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}$

$0 \leq y \leq y_o = 3.6 \cdot 10^6$ m $\qquad L_x = 6 \cdot 10^6$ m

$100\ mb \leq p \leq 1000\ mb \qquad L_y = 3.6 \cdot 10^6$ m .

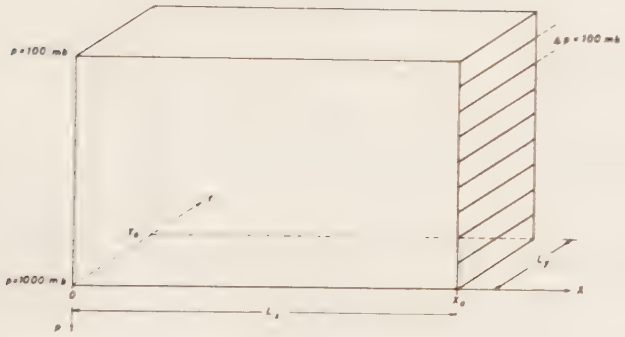

Abb. 1 Modellatmosphäre

Das Geopotential $\bar{\phi}\left(\frac{y_o}{2}, p\right)$ der Druckflächen in der Kanalmitte $y = y_o/2$ ist so gewählt worden, daß hier der vertikale Temperaturgradient $\gamma = -0.65$ grd/100 m beträgt (vergl. Tab. 1).

Druckfl. p in mb	Geopotential $\bar{\Phi}\left(\frac{y_o}{2}, p\right)$ in $10^4 m^2 s^{-2}$	Grundström. U(p) in ms^{-1}	barotrope Stör. ampl.	barokline A in $10^3 m^2 s^{-2}$
100	15.269	27	0.486	0.486
200	11.419	24	0.486	0.443
300	8.877	21	0.486	0.400
400	6.942	18	0.486	0.357
500	5.363	15	0.486	0.314
600	4.021	12	0.486	0.271
700	2.849	9	0.486	0.228
800	1.805	6	0.486	0.185
900	0.862	3	0.486	0.142
1000	0.000	0	0.486	0.099

Tab. 1 : Werte zum gewählten Geopotentialfeld $\phi(x,y,p)$

Das von p linear abhängige Grundströmungsprofil U(p) sowie die Amplitude der Druckstörung A(p) können der Tab. 1 entnommen werden. Die Amplitude $A = 0.486 \cdot 10^3\ m^2\ s^{-2}$ bewirkt über $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ eine maximale Meridionalgeschwindigkeit $v_{g\,max.} = \frac{1}{f_o} \phi_x = 10 ms^{-1}$. Für $\beta = 0$ verhält sich die Druckstörung mit der Wellenlänge $L_x = 6 \cdot 10^6$ m in x-Richtung baroklin instabil.

7. Randbedingungen

Um die ϕ_t - Gleichung (23) als Randwertproblem lösen zu können, müssen für die Begrenzungsflächen des Kanalgebietes $y = 0$, $y = y_o$, $p = 100$ mb und $p = 1000$ mb Randbedingungen in der Form von Linearkombinationen des ϕ_t und der Ableitungen von ϕ_t vorgegeben werden. Infolge der angenommenen Periodizität der Funktionen bezüglich der x - Richtung entfallen die Randbedingungen für $x = 0$ und $x = x_o$.

Als nördliche ($y = y_o$) und südliche ($y=0$) Randbedingung wird gewählt

$$\phi_t = 0 \qquad \text{für} \begin{cases} y = 0 \text{ bzw. } y = y_o \\ 0 \leq x \leq x_o \\ 100 \text{ mb} \leq p \leq 1000 \text{ mb} \end{cases} \quad . \tag{36}$$

Auf diesen beiden Randflächen gilt ferner $v_g = 0$ wegen $\phi_x = 0$ und nach (8) $u = u_g$.

Die für die beiden Begrenzungsflächen $p = 100$ mb und $p = 1000$ mb benutzten Randbedingungen beruhen alle auf der thermodynamischen Gleichung

$$\phi_{pt} + u\ \phi_{xp} + v\ \phi_{yp} + \sigma \omega = 0 \quad . \tag{37}$$

Im Einzelfall werden dann meteorologisch sinnvolle Ansätze für u, v, ω gemacht, so daß aus (37) als Randbedingung eine Linearkombination des ϕ_t und der Ableitungen von ϕ_t mit nur von Φ abhängigen Koeffizienten entsteht.

1. Randbedingung für $p = 100$ mb:

$$\phi_{tp} = -u_g \phi_{xp} - v_g \phi_{yp} \qquad \text{für} \begin{cases} 0 \leq x \leq x_o \\ 0 < y < y_o \\ p = 100 \text{ mb} \end{cases} \quad . \tag{38}$$

Gl. (38) ergibt sich aus (37) für die Näherungen $u \approx u_g$, $v \approx v_g$, $\omega \approx 0$.

2. Randbedingungen für p = 1000 mb

a) $$\phi_{tp} + u(\phi_{xp} + \sigma\rho\phi_x) + v(\phi_{yp} + \sigma\rho\phi_y) + \sigma\rho\phi_t = 0 \quad . \qquad (39)$$

Die Randbedingung (39) resultiert aus (37) mit Hilfe der Beziehung $\omega \approx \rho(\phi_t + u\phi_x + v\phi_y)$ (wegen $w \approx 0$ für p = 1000 mb). Berechnet man die Komponenten u,v nach den Balancegleichungen (8), (9), so folgt aus (39) eine Randbedingung der Form

$$\alpha\phi_{tx} + \beta\phi_{ty} + \gamma\phi_{tp} + \delta\phi_t = f_1 \qquad \text{für} \begin{cases} 0 \le x \le x_0 \\ 0 < y < y_0 \\ p = 1000 \text{ mb} \end{cases} \qquad (40)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, f_1$ Funktionen von x,y , $\gamma \neq 0$.

oder

b) $$\phi_{tp} + u\phi_{xp} + v\phi_{yp} + \sigma\rho\phi_t = 0 \quad . \qquad (41)$$

Gl. (41) beruht auf der häufig verwendeten Näherung $\omega \approx \rho\phi_t$ für p = 1000 mb. Die Komponenten u,v werden nach (8), (9) eingesetzt, so daß (41) übergeht in

$$\alpha'\phi_{tx} + \beta'\phi_{ty} + \gamma'\phi_{tp} + \delta'\phi_t = f_2 \qquad \text{für} \begin{cases} 0 \le x \le x_0 \\ 0 < y < y_0 \\ p = 1000 \text{ mb} \end{cases} \qquad (42)$$

mit $\alpha', \beta', \gamma', \delta', f_2$ Funktionen von x,y , $\gamma' \neq 0$.

oder

c) $$\phi_{tp} + u_g\phi_{xp} + v_g\phi_{yp} + \sigma\rho\phi_t = 0 \quad . \qquad (43)$$

Gl. (43) ergibt sich aus (37) mit Hilfe der Approximationen $u \approx u_g$, $v \approx v_g$, $\omega \approx \rho\phi_t$ für p = 1000 mb. Als Randbedingung in der Form der Linearkombination resultiert

$$\phi_{tp} + \delta''\phi_t = f_3 \qquad \text{für} \begin{cases} 0 \le x \le x_0 \\ 0 < y < y_0 \\ p = 1000 \text{ mb} \end{cases} \qquad (44)$$

mit δ'', f_3 Funktionen von x,y .

Die Randbedingungen (39) und (41) sind gegenüber der Randbedingung (43) zweifellos meteorologisch sinnvoller, weil in (39) und (41) über die balancierten Geschwindigkeitskomponenten ein divergenter Anteil berücksichtigt wird.

Vor allem interessiert dann in den späteren Experimenten die Auswirkung der unterschiedlichen Randbedingungen (39) und (43) auf die Lösung ϕ_t der Gl. (23).
Vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet, handelt es sich bei der Lösung von (23) mit den Randbedingungen (36)-(44) um die Lösung eines gemischten Randwertproblemes (RWP). Es treten Randbedingungen auf, wie sie zur Lösung eines

RWP 1. Art (D i r i c h l e t - Problem) vgl. Gl. (36),

eines

RWP 2. Art (N e u m a n n - Problem) vgl. Gl. (38),

und eines

RWP 3. Art vgl. Gl. (40),(42),(44) erforderlich

sind.

8. Differenzengleichungen und Lösungsverfahren

Zur numerischen Lösung von (23) wird das dreidimensionale Integrationsgebiet von einem räumlichen Gitternetz mit der horizontalen Maschenweite $\Delta x = \Delta y = d = 3 \cdot 10^5$ m und der vertikalen Maschenweite $\Delta p = 100$ mb ausgefüllt. Das in (35) analytisch gegebene ϕ - Feld geht über in das ϕ - Feld für die einzelnen Gitterpunkte (i,j,k) :

$$\phi(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta p) = \phi(6\Delta j, k\Delta p) - f_0 \cdot U(k\Delta p)\left[(j-6)\Delta y\right] + A(k\Delta p) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{20} i\right) \cdot \left[1 + \cos\frac{2\pi}{12}(j-6)\right] \qquad (45)$$

mit i=0,1,.....20
j=0,1,.....12
k=1,2,.....10 .

Die Gl. (23) wird im Inneren des Integrationsgebietes für die Punkte (i,j,k) mit i=0,1,....20; j=1,2,.....11; k=2,3,....9; in eine Differenzengleichung umgewandelt. Dazu wird die hydrostatische Stabilität σ (iΔx,jΔy,kΔp) nach folgenden Formeln berechnet:

$$\sigma_{i,j,k} = \sigma_{i,j,5} \left(\frac{500\,mb}{k\,\Delta p}\right)^{1.809} \qquad \text{für } k=1,2,3;\ i=0,....20;\ j=0,....12 \qquad (46)$$

$$\sigma_{i,j,k} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial p^2}\right)_{i,j,k} + \frac{1}{\alpha\cdot k\Delta p}\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_{i,j,k} \quad \text{für } k=4,\ldots..9 \qquad (47)$$

$$\sigma_{i,j,k} = \sigma_{i,j,9}\cdot\left(\frac{900\,mb}{k\,\Delta p}\right)^{1.809} \quad \text{für } k=10 \qquad (48)$$

$i=0,\ldots.20$; $j=0,\ldots.12$

Den Formeln (46) und (48) liegt ein von (x,y,p) unabhängiger Temperaturgradient $\frac{\partial T}{\partial z}$ = -0.65 grd/100 m zugrunde.
Die Ableitung der Determinante DT nach p läßt sich im Falle einer barotropen Störung (A=const.) annähern durch

$$\frac{\partial}{\partial p}DT = A_{33}\,\sigma_p \approx -A_{33}\,\frac{1}{p}\left\{0.809\cdot\sigma\left(\frac{x_0}{2},p\right)+\sigma(x,y,p)\right\} . \qquad (49)$$

Bei einer baroklinen Störung empfiehlt es sich, diese Approximation nur in den Flächen k=2-4 zu verwenden und in den übrigen Druckflächen $\frac{\partial}{\partial p}DT$ durch

$$\frac{1}{2\Delta p}\left\{DT_{i,j,k+1} - DT_{i,j,k-1}\right\} \qquad k=5,\ldots.9$$

zu ersetzen.
Die Ableitungen einer beliebigen Funktion ψ nach p werden in den Randbedingungen (38)-(44) wie folgt diskretisiert:

für k=1 $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)_{i,j,1} \approx \frac{1}{\Delta p}\left\{\psi_{i,j,2}-\psi_{i,j,1}\right\}$ "vorderer"Differenzenquotient

für k=10 $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)_{i,j,10} \approx \frac{1}{\Delta p}\left\{\psi_{i,j,10}-\psi_{i,j,9}\right\}$ "rückwärtiger" Differenzenquot.

Entsprechendes gilt für die Ableitungen nach y auf dem südlichen und nördlichen Rand:

für j=0 $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,0,k} \approx \frac{1}{d}\left\{\psi_{i,1,k}-\psi_{i,0,k}\right\}$

für j=12 $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,12,k} \approx \frac{1}{d}\left\{\psi_{i,12,k}-\psi_{i,11,k}\right\}$.

Zur Berechnung der zweiten Ableitungen nach y auf diesen Berandungen stehen die 5-Punkt-Formeln zur Verfügung

für j=0 $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,0,k} \approx \frac{1}{12d^2}\left\{35\psi_{i,0,k}-104\psi_{i,1,k}+114\psi_{i,2,k}-56\psi_{i,3,k}+11\psi_{i,4,k}\right\}$

für j=12 $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)_{i,12,k} \approx \frac{1}{12d^2}\left\{11\psi_{i,8,k}-56\psi_{i,9,k}+114\psi_{i,10,k}-104\psi_{i,11,k}+35\psi_{i,12,k}\right\}$.

Die übrigen Ableitungen der Größen ϕ, ϕ_t, DT werden durch die einfachsten Differenzenformeln approximiert. Diese beruhen alle auf dem zentralen Differenzenquotienten in Gestalt der 2-Punkt-Formel.

Die für die Flächen k=2-9 diskretisierte Gl. (23) bildet dann zusammen mit den für k=1 und k=10 diskretisierten Randbedingungen ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Werte $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{i,j,k}$ mit i=0,1,....20; j=1,....11; k=1,....10 (vgl. P h i l l i p s [22]).

Nachdem man für jeden Punkt (i,j,k) mit i=0,1,...20; j=1,...11; k=2,...9 festgestellt hat, daß das Elliptizitätskriterium (30) erfüllt ist, wird das Gleichungssystem für $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{i,j,k}$ mit Hilfe des L i e b m a n n verfahrens [18] gelöst. Dazu geht man aus von einer Anfangsnäherungslösung

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{0}_{i,j,k} = -c_k\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i,j,k}$$

mit c_k zweckmäßig gewählte Phasengeschwindigkeit.

Für den Iterationsschritt $\nu+1$ gilt

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{\nu+1}_{i,j,k} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{\nu}_{i,j,k} + \delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{\nu}_{i,j,k} . \qquad (50)$$

Im Falle der Randbedingungen (38) und (40) ist für $\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{\nu}_{i,j,k}$ zu setzen

$$\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{\nu}_{i,j,1} = \Delta p\cdot\left(LS^{\nu,\nu+1}_{i,j,1} - RS_{i,j,1}\right) \quad \text{für k=1 [Rbd. (38)]} \qquad (51)$$

$$\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{\nu}_{i,j,k} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{A_{11}+A_{22}}{d^2}+\frac{A_{33}}{(\Delta p)^2}}\cdot\left(LS^{\nu,\nu+1}_{i,j,k} - RS_{i,j,k}\right) \quad \text{für k=2-9 [Dgl. (23)]} \qquad (52)$$

$$\delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{\nu}_{i,j,10} = \frac{-\Delta p}{\gamma+\delta\cdot\Delta p}\cdot\left(LS^{\nu,\nu+1}_{i,j,10} - RS_{i,j,10}\right) \quad \text{für k=10 [Rbd. (40)]} \qquad (53)$$

mit **LS** : Summe aller Terme der Differentialgleichung bzw. der Randbedingung, die ϕ_t oder Ableitungen von ϕ_t enthalten, und

RS : Summe aller Terme der Differentialgleichung bzw. der Randbedingung, die ϕ_t oder Ableitungen von ϕ_t nicht enthalten.

Das Durchlaufen der Punkte (i,j,k) nach der Iterationsvorschrift (50) erfolgt für jede Fläche "zeilenweise" (i=0,...20), beginnend mit j=1. Innerhalb eines Iterationsschrittes werden

dabei alle Flächen gemäß k=1,....10 durchlaufen.
Die Differentialgleichung (23) wird als gelöst und die Randbedingungen werden als erfüllt betrachtet, wenn für die Gitterpunkte (i,j,k) gilt

$$\sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^{*}_{i,j,k} \leq KS \qquad \text{für} \quad \begin{matrix} i=0,....20 \\ j=1,....11 \\ k=1,....10 \end{matrix} \qquad (54)$$

KS Konvergenzschranke .

Bei Gültigkeit von (54) stimmen die linken und rechten Seiten der diskretisierten Randbedingungen bzw. der Differentialgleichung (23) an jedem Gitterpunkt bis auf einen von der Konvergenzschranke KS nach (51)-(53) abhängigen Betrag überein. Das als Lösung erhaltene ϕ_t - Feld ist selbstvertändlich nur als Näherungslösung für (23) zu betrachten.
Nach der Theorie von Y o u n g [19] und F r a n k e l [20] kann bei einem reinen D i r i c h l e t - Problem die Konvergenz des Iterationsverfahrens durch Überrelaxation [18], [21] beschleunigt werden. Die in dieser Arbeit angestellten Versuche, die Überrelaxation auch für das vorliegende gemischte Randwertproblem nutzbar zu machen, zeigten jedoch keine Beschleunigung der Konvergenz.
Nach Lösung von (23) ist es möglich mit Hilfe der diskretisierten Gl. (8)-(10) das balancierte Geschwindigkeitsfeld u,v, ω zu berechnen.
Das hier benutzte Verfahren zur Auffindung von u,v, ω unterscheidet sich grundsätzlich von der Lösungsmethode nach F j ö r t o f t [9] . Dort wird vorgeschlagen, die Lösung von ϕ_t , u , v , ω gleichzeitig innerhalb eines einzigen Iterationsverfahrens zu finden.
Neben (23) werden in dieser Arbeit auch der E r t e l sche Wirbelsatz in der Form von (24) mit f=f_0=const. (vgl. P h i l l i p s [22]), sowie die sog. ω_z - Gleichung

$$\nabla^2\left(\bar{\sigma}\,\omega_z\right) + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial p^2} = f_0 \frac{\partial}{\partial p}\left(\omega_z \nabla \eta_z\right) - \nabla^2\left(\omega_z \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p}\right) \qquad (55)$$

nach dem Liebmann-Verfahren gelöst. Die obigen Ausführungen gelten entsprechend auch für diese beiden Gleichungen, die für $\bar{\sigma}(p) > 0$ elliptisch sind. Im Unterschied zu (23) werden die rechten Seiten von (24) und (55) mit 5-Punkt-Formeln berechnet.

9. Ergebnisse

9.1. Geopotentialfeld mit barotroper Störung

In einem ersten Experiment wurde die Differentialgleichung (23) mit den Randbedingungen (36),(38) und (39) für das in (35) vorgegebene Φ - Feld mit barotroper Störung (Amplitude der Störung $A = 0.486 \cdot 10^3\ m^2 s^{-2}$) numerisch gelöst (vgl. Abb. 2,3). Der Coriolisparameter wurde in allen verwendeten Gleichungen mit $f=f_o=1 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}$ als konstant angenommen. Zu Vergleichszwecken wurden vier Parallelversuche mit verschiedenen Konvergenzschranken durchgeführt. Die Anzahl der Iterationsschritte IT in Abhängigkeit von der Konvergenzschranke KS ist in Tab. 2 dargestellt.

KS in $m^2 s^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
IT	11	28	44	68

Tab. 2

Bei einer Konvergenzschranke von $KS = 1 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-3}$ besteht nach der Konvergenz des Iterationsverfahrens für die diskretisierten linken und rechten Seiten der Differentialgleichung (23) und der dazugehörigen Randbedingungen eine sehr gute Übereinstimmung (vgl. Abb. 4). Erfahrungsgemäß liefert jedoch auch die bei $KS = 5 \cdot 10^{-5}\ m^2 s^{-3}$ gewonnene Lösung noch brauchbare Informationen. Die in 9.1. zu besprechenden Ergebnisse beziehen sich auf das Iterationsverfahren mit $KS = 1 \cdot 10^{-5}\ m^2 s^{-3}$.
Aus dem Bau der rechten Seite von (23) und der Koeffizienten a_{ij} $(\frac{i}{j}=1,2,3)$ der linken Seite von (23) folgt, daß die Geraden $x = x_o/4$ und $x = 3\,x_o/4$ in jeder Druckfläche eine Symmetrielinie für die Lösung Φ_t und damit auch für daraus abgeleitete Größen sind.
Das sich als Lösung ergebende Φ_t - Feld zeigt in der Horizontalverteilung das richtige Vorzeichen (vgl. Abb. 5): $\Phi_t < 0$ auf der Vorderseite der Zyklone, $\Phi_t > 0$ auf der Rückseite. In der Druckfläche p = 600 mb, die sich in der Nähe des für dieses Modell divergenzfreien Niveaus p = 625 mb befindet, wird annähernd die Gleichung $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{600mb} = -U\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{600mb}$ erfüllt, mit $U=12\ ms^{-1}$.

Die Verteilung von ϕ_t mit der Höhe wird für das verwendete Geopotentialfeld (35) mit barotroper Störung durch

$$\phi_{tp} = - v \phi_{yp} - \sigma\omega \qquad (56)$$

beschrieben. In (56) wirken Advektionsterm und Konvektionsterm einander entgegen. Aus der Abnahme von $|\phi_t|$ mit der Höhe (Abb.6) muß auf ein Überwiegen des Advektionstermes geschlossen werden. Der Einfluß der Konvergenzschranke auf das ϕ_t - Feld ist ebenfalls der Abb. 6 zu entnehmen. Die Änderungen im ϕ_t - Feld erfolgen hauptsächlich dort, wo $\frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial p} \approx 0$.
Zum Vergleich wurde für das obige Geopotentialfeld der geostrophisch approximierte E r t e l sche Wirbelsatz in der Form von (24) mit den Randbedingungen (36),(38) und (43) in gleicher Weise wie (23) gelöst. Die beiden ϕ_t - Felder zeigen nur geringe Unterschiede (vgl. Abb. 7).
Die Abb. 8 zeigt das aus dem ϕ - und ϕ_t - Feld nach (8) berechnete u - Feld für 900 mb. Für die Abweichung vom geostrophischen Wind $u-u_g$ ($f=f_o=1\cdot10^{-4}\ s^{-1}$ in u_g) darf man mit Hilfe des P h i l i p p s schen Windes (20) ansetzen

$$u - u_g \approx - \frac{\nabla^2\phi}{f_o^2} u_g - \frac{1}{2f_o^3}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{f_o^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial x} \quad . \qquad (57)$$

Die Differenz $u-u_g$ enthält einen divergenten und einen divergenzfreien Anteil. Das $(u-u_g)$-Feld ist in Abb. 9,10,11 für drei Druckflächen dargestellt.
Für $x = x_o/4$ (Hoch) und $x = 3\,x_o/4$ (Tief) reduziert sich (57) wegen $\phi_{xy} = 0$ auf

$$u - u_g \approx - \underbrace{\left(\frac{\phi_{xx}}{f_o^2} u_g\right)}_{\text{Term I}} + \underbrace{\frac{1}{f_o^2}\phi_{tx}}_{\text{Term II}} \quad . \qquad (58)$$

Die Terme I (Zentrifugalterm) und II (Isallobarenterm) besitzen für die vorliegende Modellatmosphäre entgegengesetztes Vorzeichen. Da die Differenz $u-u_g$ in den oberen Schichten der Modellatmosphäre von Term I, in den unteren von Term II bestimmt wird, weist $u-u_g$ mit der Höhe einen Vorzeichenwechsel auf. Die Extrema von $u-u_g$ sind infolge der y-Abhängigkeit von $u_g = -\frac{1}{f_o}\frac{\partial\phi}{\partial y}$ nach Norden bzw. Süden verschoben.

Die unterschiedliche Intensität der Extrema von $u-u_g$ zwischen Hoch und Tief wird weniger durch die Asymmetrie der Terme $f_o^2+\phi_{xx}$, $f_o^2+\phi_{yy}$ und DT in (8) verursacht, als vielmehr durch den Vorzeichenwechsel von ϕ_{tx} zwischen Hoch und Tief.
Die auf dem nördlichen und südlichen Rand wegen $\phi_t = 0$ geltende Bedingung $u-u_g = 0$ wird bis auf maximal $\pm 3.10^{-2}$ ms^{-1} genau erfüllt.
Das nach (9) berechnete balancierte v-Feld für 900 mb zeigt die Abb. 12. Analog zu (57) gilt

$$v - v_g \approx -\frac{\nabla^2\phi}{f_o^2} v_g + \frac{1}{2f_o^3}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\phi^2\right) - \frac{1}{f_o^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial y} \quad . \qquad (59)$$

Entlang der Geraden $x = x_o/4$ und $x = 3\,x_o/4$ vereinfacht sich (59) wegen $\phi_x = 0$, $\phi_{xy} = 0$, $\phi_{ty} = 0$ zu $v-v_g = 0$. Dieses Ergebnis bestätigen auch die in Abb. 13,14,15 dargestellten $(v-v_g)$-Felder. Die Größenordnung von $|v-v_g|$ liegt wie die von $|u-u_g|$ bei 1-2 ms^{-1}.
Die Verteilung von $v-v_g$ in meridionaler Richtung läßt sich durch die Untersuchung von $\frac{\partial}{\partial y}(v-v_g)$ für $x = x_o/2$ nachprüfen. Man erhält aus (59)

$$\frac{\partial}{\partial y}(v - v_g) \begin{cases} < 0 & \text{für Flächen oberhalb des divergenzfreien N.} \\ \approx 0 & \text{für das divergenzfreie Niveau} \\ > 0 & \text{für Flächen unterhalb des divergenzfreien N.} \end{cases}$$

Die umgekehrten Vorzeichen gelten für $x = 0$.
Aus (9) folgt für den nördlichen und südlichen Rand des Kanalgebietes wegen $\phi_t = 0$

$$v = -\frac{f^2\sigma}{DT}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t\,\partial y} \quad .$$

Die für $y = 0$ und $y = y_o$ verwendete Randbedingung $\phi_t = 0$ erreicht mit $\phi_{ty} \neq 0$ selbstverständlich nicht, daß $v = 0$.

Da die Absolutbeträge von $u-u_g$ und $v-v_g$ in 600 mb ein Minimum aufweisen, sind $u-u_g$ und $v-v_g$ in diesem Niveau als empfindlicher Indikator für Änderungen der Konvergenzschranke geeignet (vgl. Abb. 14). Deutlich ist zu erkennen, wie bei einer feineren Konvergenzschranke vor allem die Werte in den nördlichen und südlichen Randbereichen noch geändert werden.

Die nach (10) berechnete dritte Geschwindigkeitskomponente ω ist für p = 600 mb in Abb. 16 dargestellt. Die Vorzeichenverteilung von ω zeigt $\omega > 0$ (Absinken) auf der Rückseite der Zyklone und $\omega < 0$ (Aufsteigen auf der Vorderseite der Zyklone. Innerhalb einer Druckfläche tritt ein Vorzeichenwechsel zwischen der Kanalmitte und dem nördlichen und südlichen Rand (etwa bei j=2 und j=10) auf. Die $|\omega|$-Werte steigen unmittelbar am nördlichen und südlichen Rand an. Sie erreichen vor allem auf der Südseite der unteren Druckflächen Beträge, die über denen in der Kanalmitte liegen. Die Ursache davon ist in der gewählten Randbedingung $\Phi_t = 0$ zu suchen, die für y=0 und y=y_0

$$\omega = \frac{f^2 \Phi_{yp}}{\mathcal{D}T} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \, \partial y}$$

liefert.

Vergleicht man das nach (10) berechnete ω-Feld in p=1000 mb mit dem Feld $\rho \cdot \Phi_t$ in p=1000 mb (jedoch ohne die Werte im Bereich des nördlichen und südlichen Randes), so zeigen sich maximale Unterschiede von $\pm$ 2.0 $m^{-1}gs^{-3}$. Dies beweist die Brauchbarkeit der häufig verwendeten Näherungsbeziehung $\omega \approx \rho \cdot \Phi_t$ für p=1000 mb.

Wie es die Randbedingung (38) erfordert, zeigen die Ergebnisse des nach $\omega = -\frac{1}{\sigma} \cdot (\Phi_{tp} + u_g \cdot \Phi_{xp} + v_g \cdot \Phi_{yp})$ berechneten ω in 100 mb : $\omega = 0$. Auch das nach (10) gewonnene ω-Feld geht in 100 mb praktisch auf Null zurück ($|\omega|_{max} = 1.1$ $m^{-1}gs^{-3}$).

Die vertikale ω-Verteilung zeigt im Kanalgebiet, abgesehen von den nördlichen und südlichen Randbereichen, ein Maximum von $|\omega|$ bei p=625 mb. Deutlich ist im Vertikalschnitt längs der Kanalmitte (vgl. Abb. 17) die Asymmetrie zwischen x=$x_0/4$ (Hoch) und x=$3x_0/4$ (Tief) zu erkennen. Die Drängung der Isolinien ist bei x=$x_0/4$ stärker als bei x=$3x_0/4$. Dies ist eine Folge der x-Abhängigkeit der Terme $f_o^2 + \Phi_{xx}$, $f_o^2 + \Phi_{yy}$, $\mathcal{D}T$ und Φ_{tx} in (10). Im Gegensatz dazu steht die vollkommene Symmetrie von ω_g, das nach (55) berechnet wurde. Als Randbedingungen wurden für (55) vorgegeben

$$\omega_g = 0 \quad \text{für y=0 und y=}y_0; \quad \omega_g = 0 \quad \text{für p=100 mb;}$$
$$\omega_g = \rho \cdot \Phi_t \quad \text{für p=1000 mb (} \Phi_t \text{ aus dem E r t e l-schen Wirbelsatz (24)) .} \qquad (60)$$

Es ergab sich für den Vertikalschnitt längs der Kanalmitte (Abb. 18) : $|\omega| < |\omega_g|$.
Die Kontinuitätsgleichung läßt die Berechnung der Divergenz $\nabla \cdot \vec{v}$ nach

$$\nabla \cdot \vec{v} = - \frac{\partial \omega}{\partial p} \qquad (61)$$

aus dem ω - Feld zu. Aus Abb. 19 ist die Lage des divergenzfreien Niveaus (p=625 mb) zu entnehmen. Die Beträge von $\nabla \cdot \vec{v}$ liegen in der erwarteten Größenordnung. Die Amplitude von $\nabla \cdot \vec{v}$ ist in der oberen Hälfte der Modellatmosphäre größer als in der unteren. Der Vorzeichenwechsel von $\nabla \cdot \vec{v}$ im nördlichen und südlichen Randgebiet (vgl. Abb. 20) wird durch die zugehörige ω - Verteilung verursacht.
Die mit (61) aus dem ω_g - Feld gewonnene Divergenz weist in der Lage der Extrema und der Größenordnung Unterschiede zur Divergenz im nichtgeostrophischen Fall auf (vgl. Abb. 21). Diese sind als Folge der unterschiedlichen ω - Verteilung mit der Höhe leicht zu erklären. Der vertikale Verlauf von ω bzw. $\nabla \cdot \vec{v}$ ist wesentlich beeinflußt von der Wahl der Druckfläche p=100 mb als oberer Grenzfläche der Modellatmosphäre, sowie von der Wahl der Randbedingungen für ω in p=1000 mb. Die Abb. 22 zeigt den vertikalen Verlauf von ω für den geostrophischen und nichtgeostrophischen Fall am Punkt $x=x_o/2$, $y=y_o/2$. Zum Vergleich ist noch $\omega_{(g)}(p)$ mit $\omega_{(g)}=0$ für p=100 mb und p=1000 mb eingetragen. Das divergenzfreie Niveau ist in allen Fällen bei p=600-700 mb zu finden.

9.2. Geopotentialfeld mit barokliner Störung

In einem zweiten Versuch wurde in dem durch (55) gegebenen Φ - Feld die barotrope Störung durch eine barokline ersetzt. (vgl. Tab. 1). Der Betrag der Amplitude wächst zwischen p=1000mb und p=100 mb um den Faktor fünf. Die Randbedingungen bleiben gegenüber 9.1. unverändert. Die Konvergenzschranke beträgt $KS = 1 \cdot 10^{-5}\ m^2 s^{-3}$.
Die im Falle der barotropen Störung zu beobachtende Abnahme der $|\Phi_t|$ - Werte mit der Höhe geht jetzt über in eine starke Zunahme der $|\Phi_t|$ - Werte in den oberen Schichten der Modell-

atmosphäre (vgl. Abb. 23). Diese Tatsache ist an Hand der thermodynamischen Gleichung

$$\phi_{pt} = - u\,\phi_{xp} - v\,\phi_{yp} - \sigma\omega \qquad (62)$$

erklärbar, in der nun für die gewählte Modellatmosphäre die Terme $u\,\phi_{xp}$ und $\sigma\omega$ gleiches Vorzeichen haben und somit das Vorzeichen von ϕ_{tp} in der oberen Hälfte der Modellatmosphäre bestimmen. Als Folge davon liegt auch das Maximum von $|\phi_t|$ bei p=200 mb. Dieses Ergebnis wird auch durch eine Parallelrechnung mit dem E r t e l schen Wirbelsatz bestätigt.
Die Beträge von $u-u_g$ und $v-v_g$ haben im Vergleich zum barotropen Versuch vor allem in den unteren Schichten abgenommen. Die Vorzeichenverteilung ist im wesentlichen unverändert geblieben. Einige Änderungen in der Lage der Gebiete mit positivem bzw. negativem Vorzeichen von $u-u_g$ bzw. $v-v_g$ haben sich in den unteren Schichten ergeben (vgl. Abb. 24 mit Abb. 15).
Die Beträge der generalisierten Vertikalgeschwindigkeit ω liegen erheblich unter denen des barotropen Falles (für $y=y_0/2$: $|\omega|_{max} = 50\ m^{-1}gs^{-3}$ gegenüber $84\ m^{-1}gs^{-3}$). Das divergenzfreie Niveau stellt man bei p=550 mb fest, bedingt durch die neue ϕ_t - Verteilung mit der Höhe. Als Folge der niedrigeren $|\omega|_{max}$ - Werte erreicht die Divergenz nur maximal $\pm 1.8\cdot10^{-6}\ s^{-1}$.

9.3. Einfluß der Randbedingungen

Bei einer Konvergenzschranke $KS = 1\cdot10^{-5}\ m^2s^{-3}$ wurde der Einfluß der Randbedingung (43) für p=1000 mb auf die Lösung von (23) im Falle einer barotropen Störung untersucht. Das sich ergebende ϕ_t - Feld zeigt gegenüber dem Fall mit der Randbedingung (39) Abweichungen bis zu maximal $\pm 0.45\cdot10^{-2}\ m^2s^{-3}$. Kennzeichnend bei der Verwendung der Randbedingung (43) ist, daß die geschlossenen ϕ_t - Isolinien in jeder Druckfläche, nach unten zunehmend, in Richtung Norden verschoben sind (maximal 150 km). Dies hat zur Folge, daß bei dem nach (10) vom ϕ_t - Feld abhängigen ω - Feld die Isolinien zusammen mit den Extremwerten in den jeweiligen Druckflächen, ebenfalls nach unten zunehmend, bis zu 600 km (für p=900 mb) nach Süden verschoben sind. Außerdem haben sich die Extrema von ω

in den Schichten p=600 mb bis p=1000 mb, wiederum nach unten zunehmend, stark erhöht. Da für p=1000 mb nach Randbedingung (43) $\omega \approx \varsigma \phi_t$ gilt, und da sich $|\phi_t|_{max}$ bei $y=y_o/2$ befindet, liegt das Maximum von $|\omega|$ für p=1000 mb in der Kanalmitte $y=y_o/2$. Diese Unstetigkeit in der Lage des Maximums von $|\omega|$ beim Übergang von p=900 mb zu p=1000 mb macht somit (43) als Randbedingung für (23) unbrauchbar. - Der Grund dafür liegt allein in der Verwendung des geostrophischen Windes in der Randbedingung (43) an Stelle des balancierten Windes.
Für die Maximumwerte von $|u-u_g|$ und $|v-v_g|$ in 900 mb sind gegenüber dem Fall mit der Randbedingung (39) folgende Änderungen zu verzeichnen:

$|u-u_g|$: Hoch: $-5.0 \cdot 10^{-1}$ ms^{-1} Tief: $+1.5 \cdot 10^{-1}$ ms^{-1}
$|v-v_g|$: Hoch: $+2.5 \cdot 10^{-1}$ ms^{-1} Tief: $+1.0 \cdot 10^{-1}$ ms^{-1} .

Die Randbedingung (41), die im Advektionsterm ω_g durch ω ersetzt und im Konvektionsterm $\omega = \varsigma \cdot \phi_t$ benutzt, bringt die oben genannten Nachteile im Fall der barotropen Störung zum Verschwinden, wie ein numerisches Experiment ergeben hat.

Allgemein ist zu bemerken, daß der Einfluß der in p=1000 mb geänderten Randbedingung nach oben hin, also mit zunehmender Höhe, sowohl im ϕ_t - Feld als auch in den daraus abgeleiteten Feldern abnimmt. In den Schichten oberhalb des divergenzfreien Niveaus kann die Auswirkung der geänderten unteren Randbedingung vernachlässigt werden.
In einem ergänzenden Versuch (barotrope Störung, KS=$1 \cdot 10^{-5}$ m^{2}s^{-3}) wurde die auf w=0 beruhende Randbedingung (39) auch für p=100 mb angesetzt, so daß nun w=0 in p=100 mb und p=1000 mb gilt. Wie die Ergebnisse zeigen, werden die ϕ_t - Werte verglichen mit dem Fall der Randbedingung (38) nur von p=100 mb bis p=400 mb merklich beeinflußt: $|\phi_t|$ ist in p=100 mb um maximal $0.20 \cdot 10^{-2}$ m^{2}s^{-3} angewachsen, in p=300 mb nur um $0.04 \cdot 10^{-2}$ m^{2}s^{-3}. Die Auswirkungen auf $u-u_g$ und $v-v_g$ sind sehr gering. In p=300 mb treten für die Extremwerte von $u-u_g$ bzw. $v-v_g$ folgende Abweichungen auf:

$|u-u_g|$: Hoch: $-3 \cdot 10^{-2}$ ms^{-1} Tief: $-2 \cdot 10^{-2}$ ms^{-1}
$|v-v_g|$: Hoch: $-1 \cdot 10^{-2}$ ms^{-1} Tief: $-3 \cdot 10^{-2}$ ms^{-1} .

Relativ stärker sind die Auswirkungen auf $|\omega|$. Man beobachtet eine Zunahme von 4.5 $m^{-1}gs^{-3}$ in p=200 mb. Das Maximum von $|\omega|$ in der Vertikalverteilung liegt wiederum bei p=625 mb. In p=100 mb beträgt $|\omega| = 2.3\ m^{-1}gs^{-3}$. Die auf w=0 beruhende Randbedingung (39) führt also zu $\omega \approx 0$ in p=100 mb.
Man kann somit feststellen, daß die Randbedingungen (38) ($\omega = 0$) und (39) (w = 0) für p=100 mb weitgehend gleiche Ergebnisse im ϕ_t-Feld und in den balancierten Geschwindigkeitskomponenten zeigen. Änderungen von ϕ_t infolge verschiedener Randbedingungen wirken in der Weise weiter, daß ω hauptsächlich von ϕ_{tp}, u und v von ϕ_{tx}, ϕ_{ty} abhängig sind.

9.4 Einfluss des breitenabhängigen Coriolis-Parameters

In den bisherigen Experimenten wurde der Coriolis-Parameter in (23),(8),(9),(10) konstant gehalten: $f=f_o=1\cdot10^{-4}\ s^{-1}$. Als Erweiterung zu dem in 9.1. beschriebenen Fall mit barotroper Störung und Randbedingung (38),(39) wurde nun eine in y lineare Verteilung von f angenommen, mit $f(y_o/2) = 1\cdot10^{-4}\ s^{-1}$ und $\beta = \frac{df}{dy} = 1.6\cdot10^{-11}\ m^{-1}s^{-1}$.
Der von y abhängige Coriolis-Parameter verursacht eine starke Abnahme von $|\phi_t|$ mit der Höhe (vgl. Abb. 25). Bezogen auf die Kanalmitte ($y = y_o/2$) sind die ϕ_t-Werte in den jeweiligen Druckflächen stark asymmetrisch, wobei $\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{NORD} < \left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{SÜD}$ gilt. In den Druckflächen oberhalb von p=600 mb nehmen die ϕ_t-Werte auf der Nordseite des Kanals entgegengesetztes Vorzeichen wie im Süden an. Bei Verwendung der ϕ_t-Gleichung als Prognosegleichung würde f(y) im Sinne einer Westwärtsverlagerung (retrogression) wirken. Die Asymmetrie in ϕ_t zwischen Hoch und Tief ist stark ausgeprägt (vgl. Abb. 25).
Die Vorzeichenverteilung der $(u-u_g)$- und $(v-v_g)$-Felder (u_g und v_g mit f(y)) bleibt in den einzelnen Druckflächen im wesentlichen erhalten. Jedoch sind $u-u_g$ und $v-v_g$ gegenüber dem Fall mit $f=f_o$ um 50-100 % höher.
Die dritte Komponente ω zeigt in allen Druckflächen die richtige Vorzeichenverteilung, wobei $|\omega|$ durchwegs kleiner als bei $f=f_o$ ist. Die Höne des divergenzfreien Niveaus liegt nach wie vor bei p=625 mb.

10. Ergebnisse einer 24-stündigen Vorhersage

Um die Unterschiede zwischen der ϕ_t -Gleichung (23) und dem E r t e l schen Wirbelsatz (24) aufzuzeigen, wurden beide Gleichungen mit $f=f_o=$ const. als prognostische Gleichungen für das ϕ-Feld benutzt. Als Randwerte wurden für die ϕ_t-Gleichung (36), (38),(39) und für den E r t e l schen Wirbelsatz (36),(38),(43) gesetzt. Darüberhinaus wurde die ω_z-Gleichung (55) mit den unter (60) angegebenen Randbedingungen zum Ende der Vorhersage gelöst, um $\nabla\cdot v$ nach $\nabla\cdot v = -\frac{\partial \omega_z}{\partial p}$ im geostrophischen Fall berechnen zu können.

Mit einem Zeitschritt von $\Delta t=2$ h (definiert nach $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi(t+\Delta t)-\phi(t-\Delta t)}{2\Delta t}$ und der Konvergenzschranke KS= 1.10^{-5} $m^2 s^{-3}$ wurde eine 24-stündige Vorhersage, ausgehend von dem Anfangsfeld (35) mit barotroper Störung, durchgerechnet. Für das zeitliche Integrationsverfahren wurde $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ zum Zeitpunkt t=0 h durch einen vorderen Differenzenquotienten approximiert.

Zu den verschiedenen Zeitpunkten wurde vor Beginn der jeweiligen Iteration zur Lösung von (23) die Gültigkeit des Elliptizitätskriteriums (30) nachgeprüft. Es zeigte sich, daß während des ganzen Prognosezeitraumes das Elliptizitätskriterium erfüllt wurde.

Der Hauptunterschied in den Ergebnissen der beiden Prognosegleichungen besteht nach 24 Stunden darin, daß im Falle der geostrophischen Approximation (E r t e l scher Wirbelsatz) sämtliche Felder (ϕ_t , ω_z , $\nabla\cdot v$) in jeder Druckfläche bezüglich Hoch und Tief symmetrisch sind (vgl. Abb. 27,35,38). Die Ursache liegt darin, daß der E r t e l sche Wirbelsatz (24) wegen der symmetrischen Struktur der rechten Seite und wegen der konstanten Koeffizienten auf der linken Seite Zyklone und Antizyklone gleich behandelt. Entscheidend ist hierbei noch, daß $\bar{\sigma}(p)$ für die einzelnen Druckflächen während des ganzen Vorhersagezeitraumes konstant gehalten wird.

Dagegen ist im Falle der ϕ_t-Gleichung (23) eine deutliche Asymmetrie der Felder zwischen Zyklone und Antizyklone zu erkennen (vgl. Abb. 26,34,37). Dies wird bewirkt durch den unterschiedlichen Verlauf der Terme $f_o^2 + \phi_{xx}$, $f_o^2 + \phi_{yy}$ und ϕ_{tx} im Hoch und Tief, sowie durch die hydrostatische Stabilität σ, die für t>0 von x,y abhängig ist (für t=0 h gilt für p = const.: $\sigma=\sigma(y)$).

Der Verlauf von ϕ_t in der Vertikalen hat sich im nichtgeostrophischen Fall zum Zeitpunkt t=24 h gegenüber t=0 h stark geändert. Da sich für t>0 h die barotrope Störung in eine barokline ($\phi_{xp} \neq 0$) umwandelt, entsteht eine zonale Temperaturadvektion $u \cdot \phi_{xp}$ Diese tragt zusammen mit $\sigma\omega$ zum Anwachsen von $|\phi_t|$ mit der Höhe bei (vgl. Abb. 26).

Das ganze Drucksystem ist in 500 mb mit einer mittleren Phasengeschwindigkeit von etwa 10 ms^{-1} unter Verstärkung der Druckgegensätze nach Osten gewandert. In Übereinstimmung mit den synoptischen Erfahrungen beobachtet man in den unteren Druckflächen eine Verlagerung der Zyklone in Richtung NE und der Antizyklone in Richtung SE (vgl. Abb. 29).

Obwohl die beiden ϕ_t-Felder im Vertikalschnitt (vgl. Abb. 26, 27) beträchtliche Unterschiede zeigen, sind die Abweichungen $|\Delta\phi|$ zwischen den ϕ-Feldern nach 24 Stunden verhältnismäßig gering, nämlich

in 300 mb	$\lvert\Delta\phi\rvert < 6.0 \cdot 10^2\ m^2 s^{-2}$
600 mb	$\lvert\Delta\phi\rvert < 3.0 \cdot 10^2\ m^2 s^{-2}$
900 mb	$\lvert\Delta\phi\rvert < 2.5 \cdot 10^2\ m^2 s^{-2}$.

In Bodennähe ist die Entwicklung der Druckgebilde im nichtgeostrophischen Fall kraftiger als im geostrophischen. Sie beträgt im nichtgeostrophischen Fall in 900 mb $+4.8 \cdot 10^2\ m^2 s^{-2}$ (Hoch), $-3.9 \cdot 10^2\ m^2 s^{-2}$ (Tief) und im geostrophischen Fall $+3.2 \cdot 10^2\ m^2 s^{-2}$ (Hoch), $-3.2 \cdot 10^2\ m^2 s^{-2}$ (Tief). Diese Bevorzugung der Antizyklogenese gegenüber der Zyklogenese durch die ϕ_t-Gleichung (23) ist als ein Mangel der Gl. (23) festzuhalten.

Bekanntlich wird die stärkere Entwicklung von Zyklonen gegenüber Antizyklonen durch den Divergenzterm der Vorticitygleichung $(f+\zeta)\nabla\cdot v$ hervorgerufen. In der ϕ_t-Gleichung (23), die man als verallgemeinerte nichtgeostrophische Vorticitygleichung interpretieren kann, findet man im inhomogenen Term nur Anteile der Art $\left(f_o + \frac{\phi_{xx}}{f_o}\right)\nabla\cdot v$ und $\left(f_o + \frac{\phi_{yy}}{f_o}\right)\nabla\cdot v$. Schon von daher ist mit (23) eine schwächere asymmetrische Entwicklung zu erwarten.

In diesem Zusammenhang sei auf die Ergebnisse von R e i s e r und S c h a n z [8] verwiesen. Dort wurde für eine barotrope Modellatmosphäre mit Hilfe der primitiven Gleichungen eine 48-stündige Vorhersage erstellt und zwar mit einem nach der F j ö r t o f t schen Methode balancierten Geschwindigkeitsfeld

als Anfangsfeld. Es ergab sich eine Unterschätzung der Zyklonenentwicklung als Folge eines offenbar mangelhaft balancierten Anfangsfeldes.
Zusammenfassend kann also festgestellt werden, daß die Verwendung der F j ö r t o f t schen Balancierungsmethode $\frac{d^2\Phi}{dt^2} \approx 0$ im barotropen und baroklinen Fall die Entwicklung der Zyklone im Vergleich zu derjenigen der Antizyklone benachteiligt.

Trog- und Rückenachse haben in den bodennahen Druckflächen des nichtgeostrophischen Modelles eine unterschiedliche mittlere Phasengeschwindigkeit c, z.B. in p=1000 mb für $y = y_o/2$: $c_{Trog} = 17\ ms^{-1}$, $c_{Rücken} = 15\ ms^{-1}$. Dies kann man aus der Lage der Achsen der beiden Druckstörungen entnehmen (Abb. 34). Dagegen sind die Verlagerungsgeschwindigkeiten für Zyklone und Antizyklone im geostrophischen Fall gleich ($c = 17\ ms^{-1}$, vgl. Abb.35).

Beide Prognosegleichungen (23) und (24) liefern für t=24 h eine Neigung der Achsen der beiden Druckstörungen nach Westen, die sich für $t > 0$ h einstellt. In den oberen Schichten der Modellatmosphäre deutet sich eine Tendenz zur Neigung nach Osten an. Die Achsenneigung ist ähnlich der von M a t s u m o t o [32] angegebenen.
Für t=24 h kann über (8) - (10) aus dem Φ_t-Feld das balancierte Geschwindigkeitsfeld berechnet werden: Die Felder von u,v, haben sich als Folge der Verlagerung und der Entwicklung der Druckgebilde deformiert und betragsmäßig verstärkt (vgl.Abb. 30, 32, 36). Auch $|u-u_g|$ und $|v-v_g|$ (vgl. Abb. 31, 33) sind stark angewachsen. Die einzelnen Felder zeigen die von t=0 h her gewohnte horizontale und vertikale Verteilung. Infolge des seitlichen Ausscherens der Druckgebilde sind die $|\Phi_{ty}|$-Werte an einigen Punkten des nördlichen und südlichen Randes größer als zur Zeit t=0 h, so daß dort die schon in 9.1. erwähnten Störungen von v und ω verstärkt auftreten.
Die Absolutwerte von ω sind im Gebiet mit aufsteigender Luftbewegung größer als im Absinkgebiet. Den Verlauf von ω und σ für die Kanalmitte ($y=y_o/2$) in 900 mb zeigt Abb. 39. Die Phasenverschiebung zwischen ω und σ ändert mit der Höhe das Vorzeichen. Während der ganzen Vorhersage blieb für jede Druck-

fläche das Flächenmittel von $\sigma(x,y,p)$ im nichtgeostrophischen Fall nahezu konstant. Die maximale Abweichung beträgt 5% in p=900 mb und p=1000 mb. In allen Druckflächen ist nach 24 Stunden auf der Vorderseite der Zyklone Enstabilisierung, auf der Rückseite Stabilisierung zu beobachten (vgl. T i e d t k e [23]).

Die grössere Amplitude von $\nabla\cdot v$ in der oberen Hälfte der Modellatmosphäre ist auch bei t=24 h vorhanden (vgl. Abb. 37). Im geostrophischen Fall (Abb. 38) herrschen wie bei t=0 h die umgekehrten Verhältnisse.
Weiterhin ist im geostrophischen Fall deutlich sichtbar, daß die Randbedingung $\omega_g=0$ in p=100 mb nicht zu einem Minimum der Divergenz in p=100 mb führt; im nichtgeostrophischen Fall ist dieses Minimum vorhanden. Hierin ist das unterschiedliche Einwirken der Randbedingungen $\omega=0$ auf die Lösung von (23) bzw. $\omega_g=0$ auf die Lösung von (55) zu erkennen. Der Verlust des Minimums im geostrophischen Fall wird durch das "Abschneiden" der Atmosphäre in p=100 mb verursacht.
Wie ein Ergänzungsexperiment ergab, führt die Randbedingung $\omega=0$ in p=1000 mb im nichtgeostrophischen Fall dazu, daß das Maximum der Divergenz von der oberen in die untere Hälfte der Atmosphäre wandert.
Damit ist gezeigt, daß die vertikale Verteilung der Divergenz entscheidend von den gewählten oberen und unteren Randbedingungen für ω bzw. ω_g abhängt.
Beim Vergleich von ω mit ω_g bzw. der Divergenzen untereinander muß beachtet werden, daß ω und ω_g am nördlichen und südlichen Rand unterschiedliches Verhalten zeigen, nämlich

$$\omega \neq 0 \qquad \omega_g = 0 \quad .$$

Dies rührt davon her, weil ω_g direkt aus dem ϕ-Feld mit Hilfe von (55) und den Randbedingungen (60) bestimmt wird; das nichtgeostrophische ω dagegen ist durch die Lösung ϕ_t von (23) über (10) an allen Punkten einschließlich des nördlichen und südlichen Randes festgelegt.

Schlußbemerkung

In den verschiedenen Experimenten wurde gezeigt, daß die auf der Näherung $\frac{d^2\omega}{dt^2} \approx 0$ beruhende ϕ_t - Gleichung (23) mit geeignet gewählten Randbedingungen als gemischtes Randwertproblem gelöst werden kann. Die Geopotentialtendenz ϕ_t ist in dem Sinne als Lösung zu verstehen, daß die diskretisierten linken Seiten der Randbedingungen bzw. der Gl. (23) mit den entsprechenden rechten Seiten übereinstimmen, wenn man ϕ_t einsetzt.
Zum Zwecke der Fehlerabschätzung wurde im Falle des E r t e l - schen Wirbelsatzes (24) mit den Randbedingungen (36) und (43) die Abhängigkeit der Lösung $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{i,j,k}$ des linearen Gleichungssystems - entstanden durch Diskretisation von (24),(38) und (43) - von den beiden "Startlösungen" $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{o}_{i,j,k} = 0$ und $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{o}_{i,j,k} = -\,c_k \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i,j,k}$ sowie der Konvergenzschranke KS untersucht: je feiner die Konvergenzschranke gewählt wird, um so mehr ist die Lösung $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{i,j,k}$ von der "Startlösung" $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{o}_{i,j,k}$ unabhängig (vgl. Abb. 40). Da im gezeigten Fall die wahre Lösung $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{w}_{i,j,k}$ von beiden Seiten eingeschlossen wird, läßt sich die Abweichung zwischen der bei einer bestimmten Konvergenzschranke erhaltenen Lösung $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{i,j,k}$ und der wahren Lösung $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{w}_{i,j,k}$ angeben, z.B. für KS = $1\cdot10^{-5}$ m^2 s^{-3} : $\left(|\phi_t|-|\phi_t^w|\right)_{max} = \varepsilon_{max} = +\,0.07\cdot10^{-2}$ m^2 s^{-3} .
Die Abweichung $|\phi_t|-|\phi_t^w| = \varepsilon$ ist weitgehend unabhängig von p . Die maximale Abweichung tritt an den Punkten auf, wo ϕ_t Extremwerte erreicht. Um Rechenzeit zu sparen, wurde in den Experimenten KS $\geq 1\cdot10^{-5}$ m^2 s^{-3} gewählt. Für die Gl. (23) mit den entsprechenden Randbedingungen gelten die angeführten Betrachtungen ebenso.
Das über die ϕ_t - Gleichung (23) erhaltene balancierte Geschwindigkeitsfeld u,v,ω stimmt hinsichtlich des Vorzeichens und des Betrages mit den meteorologischen Vorstellungen überein. Die Untersuchung der Größen $u-u_g$ und $v-v_g$ zeigt, daß sich die balancierten Komponenten u,v hinsichtlich Größenordnung und Vorzeichenverteilung wie die entsprechenden Komponenten des P h i l i p p s schen Windes verhalten. Eine letzte Prüfung für die Güte des balancierten Größen u,v,ω bringt freilich erst eine Prognose mit Hilfe der primitiven Gleichungen mit dem balancierten u,v,ω - Feld als Anfangsfeld.

Wenn die ϕ_t - Gleichung als prognostische Gleichung für das ϕ - Feld verwendet wird, so beschreibt sie gegenüber dem E r t e l schen Wirbelsatz die Entwicklung der Druckgebilde unter dem Einschluß ageostrophischer Komponenten. Die Gl. (23) läßt im Gegensatz zum geostrophischen Fall für $t > 0$ h das Entstehen einer von beiden Horizontalkoordinaten abhängigen hydrostatischen Stabilität σ zu.

Die aus verschiedenen numerischen Vorhersageexperimenten [23], [27], [28] bekannte Neigung der Trog- bzw. Rückenachse in den oberen Schichten der Atmosphäre nach Osten tritt hier im Falle der Prognosegleichungen (23) bzw. (24) nicht auf. Die Ursache dafür liegt darin, daß die für die vertikale Auflösung der Modellatmosphäre verwendete Schichtdicke $\Delta p = 100$ mb noch zu groß ist, so daß die für $p = 100$ mb verwendete Randbedingung (38) durch die Differenzengleichungen die für die gewünschte Achsenneigung erforderliche Zunahme von $|\phi_t|$ mit der Höhe in den oberen Druckflächen (bei barotroper Störung und $t = 0$ h) verhindert (vgl. Abb. 41).

Die Neigung der Achsen nach Osten ergibt sich dann, wenn man in $p = 100$ mb die geostrophisch approximierte, divergenzfreie, barotrope Vorticitygleichung

$$\nabla^2 \phi_t = -J\left(\phi, \frac{\nabla^2 \phi}{f_o} + f\right)$$

mit den Randbedingungen $\phi_t = 0$ für $y = 0$ und $y_o = 0$ nach ϕ_t löst und die so erhaltenen ϕ_t - Werte als Randbedingung in $p = 100$ mb für (23) bzw. (24) verwendet (vgl. Abb. 42).

Da (23) und (24) als gefilterte Gleichungen die Entwicklung der meteorologischen Lärmwellen ausschließen, ist der Integrationszeitschritt Δt bei einem festen räumlichen Gitterabstand nur von der Phasengeschwindigkeit der meteorologisch bedeutsamen Wetterwellen abhängig.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. G. H o l l m a n n danken, der die Arbeit anregte und förderte. Weiterhin danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung, Herrn Prof. Dr. E. W i e n h o l t z , sowie den Mitarbeitern des Instituts für Theoretische Meteorologie für anregende Diskussionen.

A B B I L D U N G E N

Nr. 2 - 42

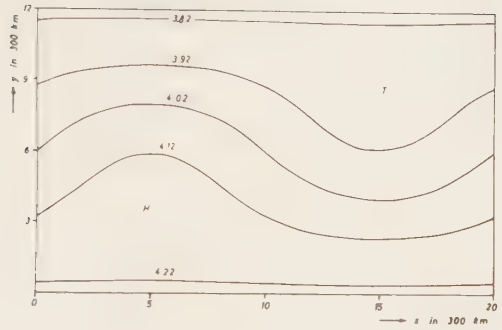

Abb. 2 Geopotential Φ in 10^4 m^2s^{-2} für 600 mb (t=0 h)

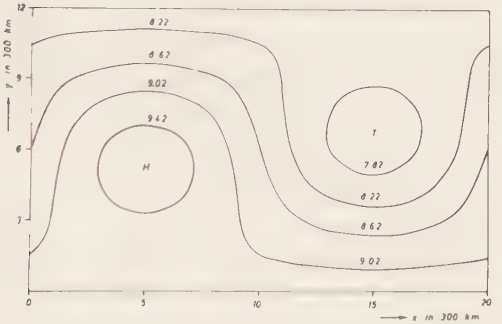

Abb. 3 Geopotential Φ in 10^3 m^2s^{-2} für 900 mb (t=0 h)

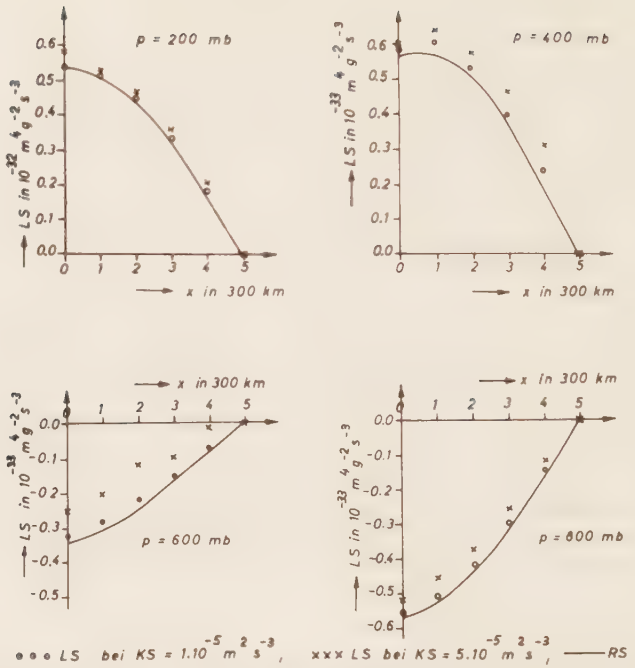

Abb. 4 Vergleich der linken Seite (LS) mit der rechten Seite (RS) der Φ_t - Gleichung nach Konvergenz mit verschiedenen Konvergenzschranken KS für Punkte in der Kanalmitte $y=y_o/2$

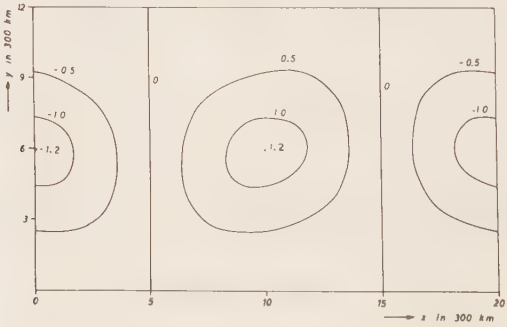

Abb. 5 $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ in 10^{-2} $m^2 s^{-3}$ in 600 mb (nichtgeostr., t=0 h)

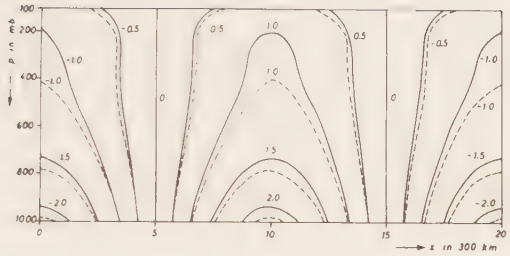

Abb. 6 Zonaler Vertikalschnitt von $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ in 10^{-2} $m^2 s^{-3}$ für $y=y_0/2$ (nichtgeostr., t=0 h)
---- KS = $1 \cdot 10^{-5}$ $m^2 s^{-3}$, —— KS = $5 \cdot 10^{-5}$ $m^2 s^{-3}$

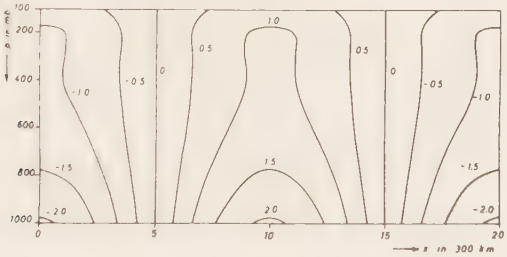

Abb. 7 Zonaler Vertikalschnitt von $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ in 10^{-2} $m^2 s^{-3}$ für $y=y_0/2$ (geostrophisch, t=0 h)

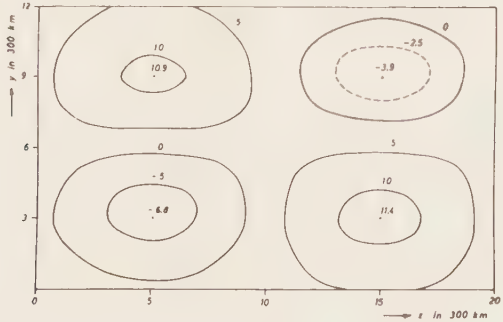

Abb. 8 Geschwindigkeitskomponente u in ms^{-1} in 900 mb (balanciert, t=0 h)

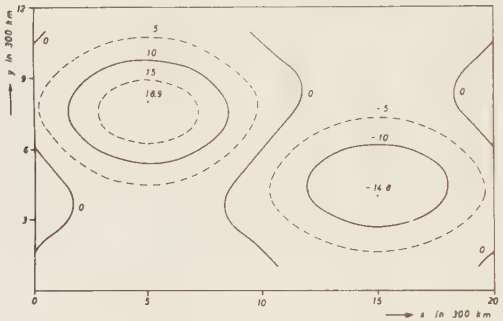

Abb. 9 $(u-u_g)$ - Feld in 10^{-1} ms^{-1} in 300 mb (t=0 h)

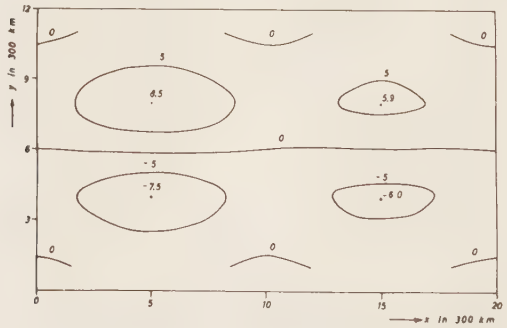

Abb. 10 $(u-u_g)$ - Feld in 10^{-1} ms^{-1} in 600 mb (t=0 h)

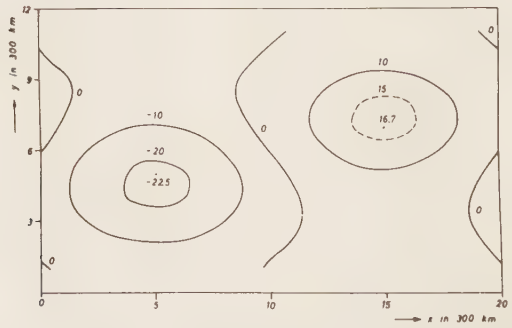

Abb. 11 $(u-u_g)$ - Feld in 10^{-1} ms^{-1} in 900 mb (t=0 h)

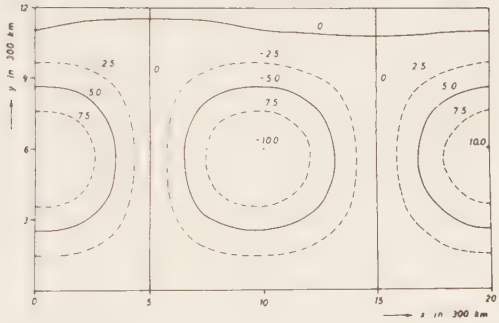

Abb. 12 Geschwindigkeitskomponente v in ms^{-1} in 900 mb (balanciert, t=0 h)

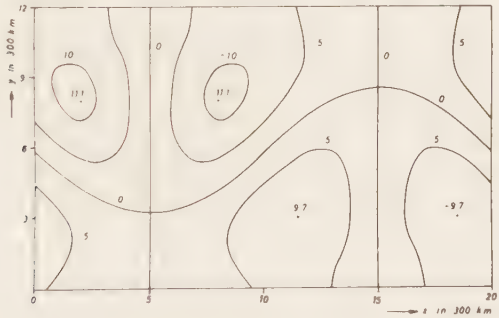

Abb. 13 $(v-v_g)$ - Feld in 10^{-1} ms^{-1} in 300 mb (t=0 h)

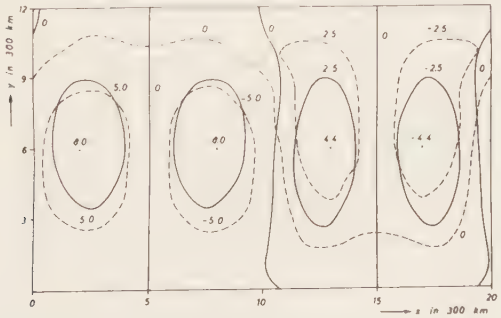

Abb. 14 $(v-v_g)$ - Feld in 10^{-1} ms^{-1} in 600 mb (t= 0 h)
——— KS = $1 \cdot 10^{-5}$ m^2s^{-3} , ---- KS = $2 \cdot 10^{-4}$ m^2s^{-3}

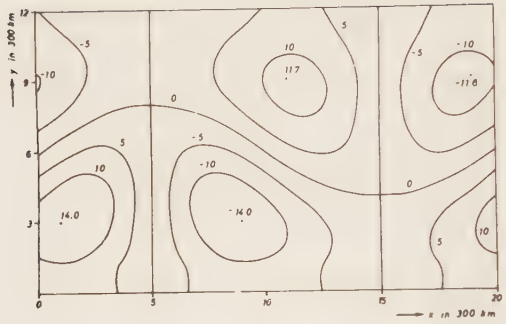

Abb. 15 $(v-v_g)$ - Feld in 10^{-1} ms^{-1} in 900 mb (t=0 h)

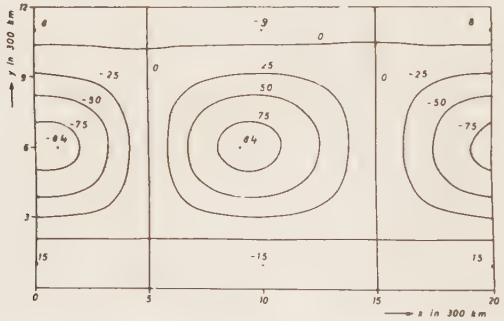

Abb. 16 Vertikalgeschwindigkeit ω in $m^{-1}gs^{-3}$ in 600 mb (balanciert, t=0 h)

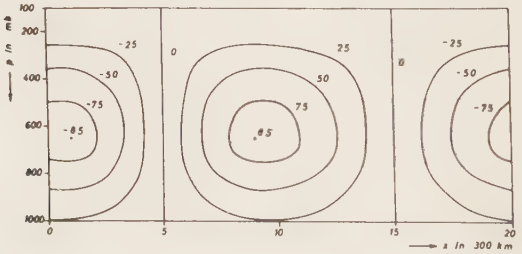

Abb. 17 Zonaler Vertikalschnitt von ω in $m^{-1}gs^{-3}$ für $y=y_0/2$ (balanciert, t=0 h)

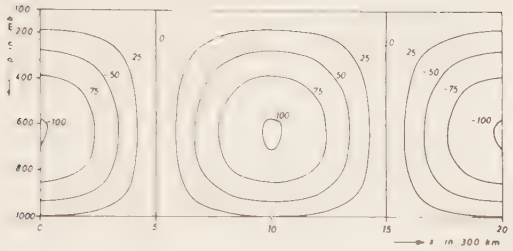

Abb. 18 Zonaler Vertikalschnitt von ω_g in $m^{-1}gs^{-3}$ für $y=y_o/2$ (geostr., t=0 h)

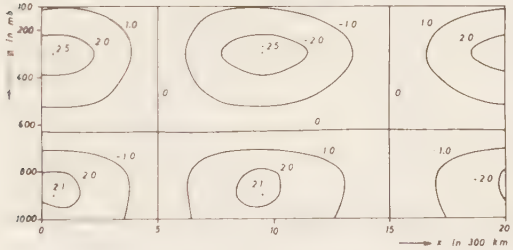

Abb. 19 Zonaler Vertikalschnitt der Horizontaldivergenz $\nabla \cdot \vec{v}$ in 10^{-6} s^{-1} für $y=y_o/2$ (nichtgeostr., t=0 h)

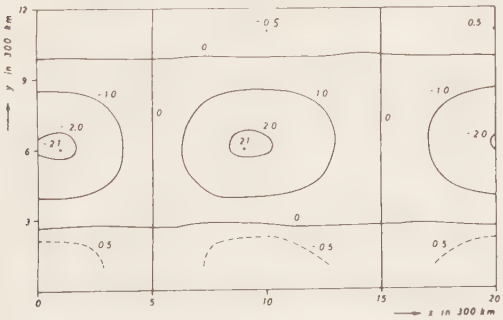

Abb. 20 Horizontaldivergenz $\nabla \cdot \vec{v}$ in 10^{-6} s^{-1} in 900 mb (nichtgeostr., t=0 h)

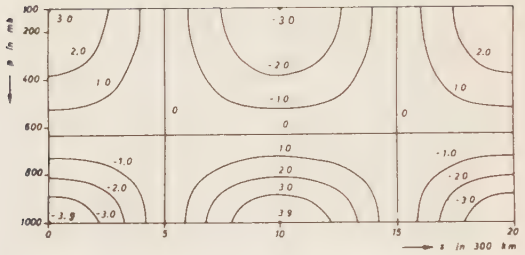

Abb. 21 Zonaler Vertikalschnitt der Horizontaldivergenz $\nabla \cdot v$ in 10^{-6} s^{-1} für $y=y_0/2$ (geostr., t=0 h)

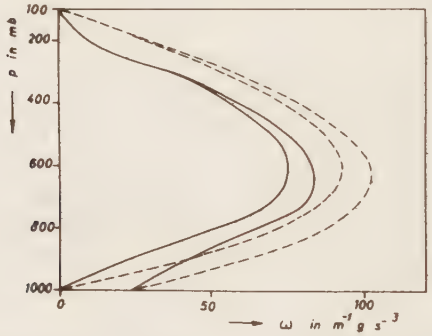

Abb. 22 Vertikaler Verlauf von ω (nichtgeostr.) ——— und ω_g (geostr.) ---- am Punkt $\{x=x_0/2 \; ; \; y=y_0/2\}$ (t=0 h) — Randbed. in p=1000 mb: $\left.\begin{matrix}\omega \\ \omega_g\end{matrix}\right\} = 0$ bzw. $\omega = g \cdot (\phi_t + v_g \nabla \phi_p)$, $\omega_g = g \cdot \phi_t$

$p = 100\,mb : \omega = -\frac{1}{\sigma}(\phi_{tp} + v_g \nabla \phi_p) = 0 ; \omega_g = 0$

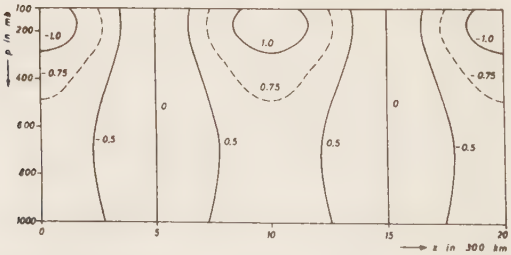

Abb. 23 Zonaler Vertikalschnitt von $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ in 10^{-2} $m^2 s^{-3}$ für $y=y_0/2$ (nichtgeostr., barokline Störung, t=0 h)

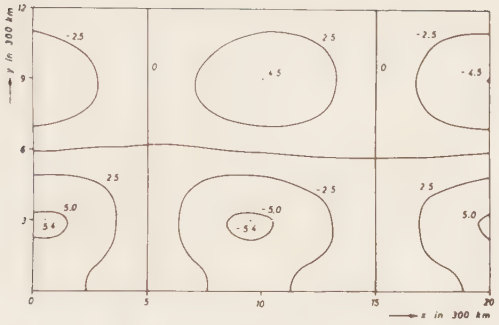

Abb. 24 $(v-v_g)$ - Feld in 10^{-1} ms^{-1} in 900 mb (barokline Störung, t=0 h)

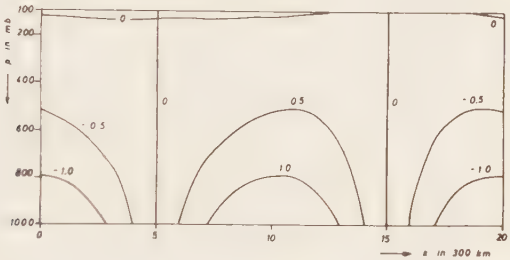

Abb. 25 Zonaler Vertikalschnitt von $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ in 10^{-2} m^2s^{-3} für $y=y_o/2$ (nichtgeostr., KS = $5 \cdot 10^{-5}$ m^2s^{-3}, f=f(y), t=0 h)

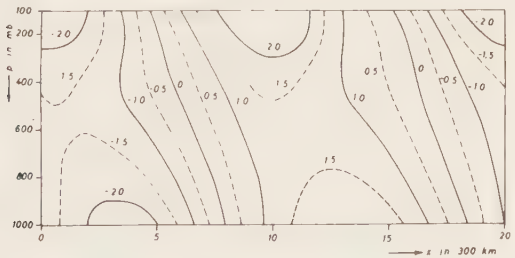

Abb. 26 Zonaler Vertikalschnitt von $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ in 10^{-2} m^2s^{-3} für $y=y_o/2$ (nichtgeostr., t=24 h)

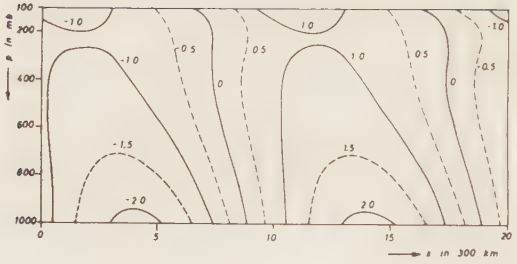

Abb. 27 Zonaler Vertikalschnitt von $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ in 10^{-2} $m^2 s^{-3}$ für $y=y_0/2$ (geostr., t=24 h)

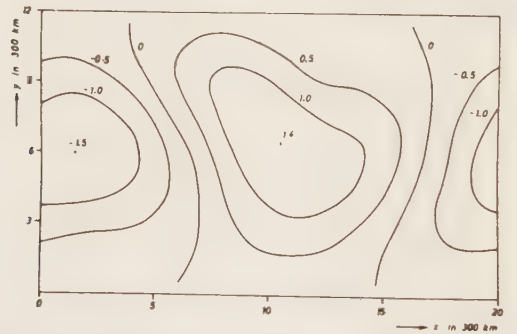

Abb. 28 $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ in 10^{-2} $m^2 s^{-3}$ in 600 mb (nichtgeostr., t=24 h)

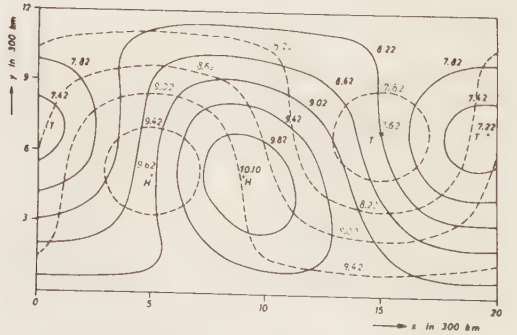

Abb. 29 Geopotential ϕ in 10^3 $m^2 s^{-2}$ für 900 mb (nichtgeostr.)
---- t = 0 h ——— t = 24 h

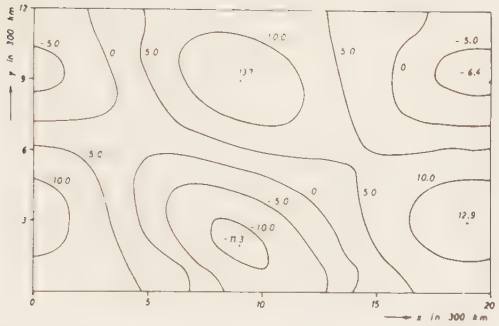

Abb. 30 Geschwindigkeitskomponente u in ms^{-1} in 900 mb (balanciert, t=24 h)

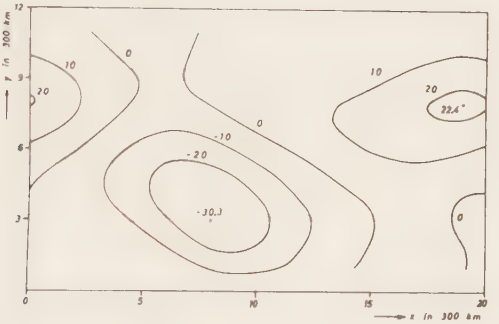

Abb. 31 $(u-u_g)$ - Feld in 10^{-1} ms^{-1} in 900 mb (t=24 h)

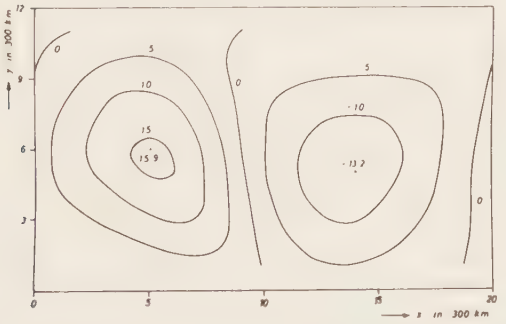

Abb. 32 Geschwindigkeitskomponente v in ms^{-1} in 900 mb (balanciert, t=24 h)

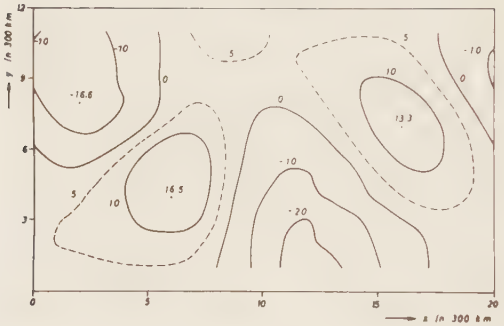

Abb. 33 $(v-v_g)$ - Feld in 10^{-1} ms^{-1} in 900 mb (t=24 h)

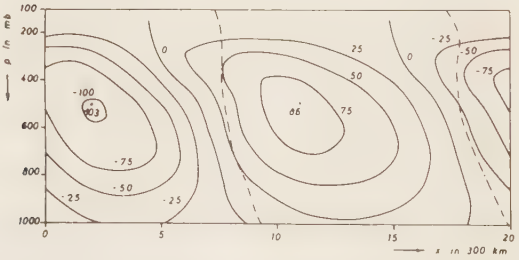

Abb. 34 Zonaler Vertikalschnitt von ω in $m^{-1}gs^{-3}$ für $y=y_o/2$ (balanciert, t=24 h)
—·—·— Rücken- bzw. Trogachse

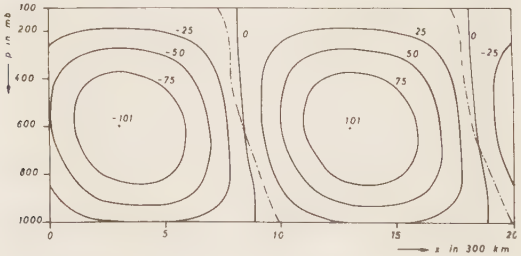

Abb. 35 Zonaler Vertikalschnitt von ω_g in $m^{-1}gs^{-3}$ für $y=y_o/2$ (geostr., t=24 h) —·—·— Rücken- bzw. Trogachse

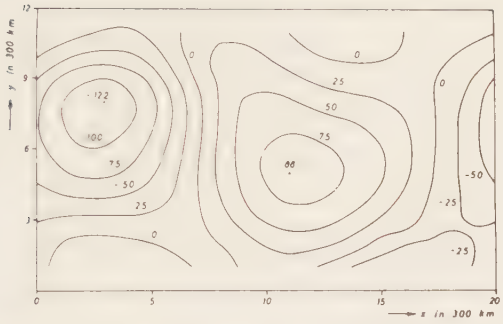

Abb. 36 Geschwindigkeitskomponente ω in $m^{-1}gs^{-3}$ in 600 mb (balanciert, t=24 h)

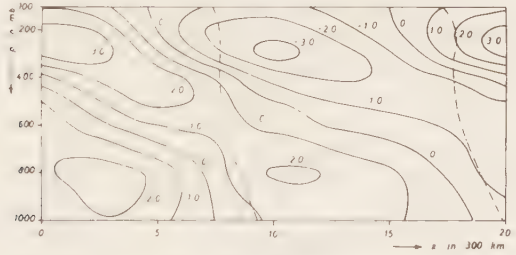

Abb. 37 Zonaler Vertikalschnitt der Horizontaldivergenz $\nabla \cdot v$ in 10^{-6} s^{-1} für $y=y_o/2$ (nichtgeostr., t=24 h)
—·—·— Rücken bzw. Trogachse

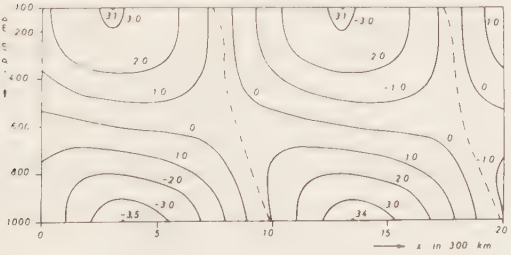

Abb. 38 Zonaler Vertikalschnitt der Horizontaldivergenz $\nabla \cdot v$ in 10^{-6} s^{-1} für $y=y_o/2$ (geostr., t=24 h)
—·—·— Rücken- bzw. Trogachse

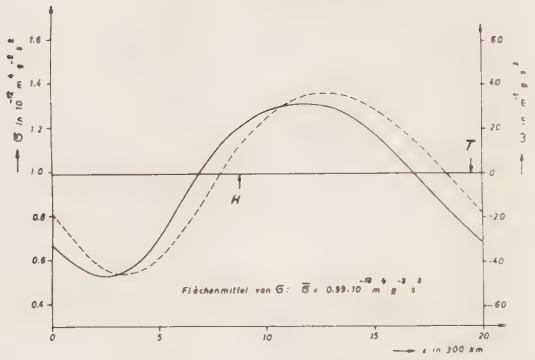

Abb. 39 Balancierte Vertikalgeschwindigkeit ω (x) - - - - und hydrostatische Stabilität σ (x) ——— für $y=y_0/2$ in 900 mb (t=24 h)

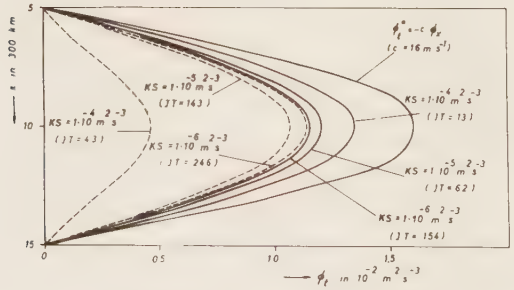

Abb. 40 Verlauf von $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ (x) $(x_0/4 \leq x \leq 3x_0/4)$ für $y=y_0/2$ und p=600 mb in Abhängigkeit von der Konvergenzschranke KS (geostr., barotrope Störung, t=0 h)

- - - - bei "Startlösung" $\frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv 0$

——— bei "Startlösung" $\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c_{600} \frac{\partial \phi}{\partial x}$

mit $c_{600} = 16\ ms^{-1}$

IT = Anzahl der Iterationsschritte bis zur Konvergenz

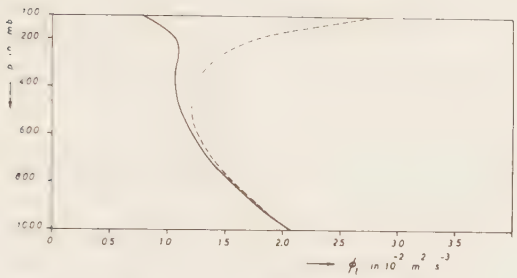

Abb. 41 Vertikaler Verlauf von $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ im Punkt $x=x_0/2$, $y=y_0/2$ (barotrope Störung, geostr., t=0 h)
——— Randbedingung $\omega = 0$ in p=100 mb
- - - - - $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ in p=100 mb aus barotroper Vorticity-gleichung

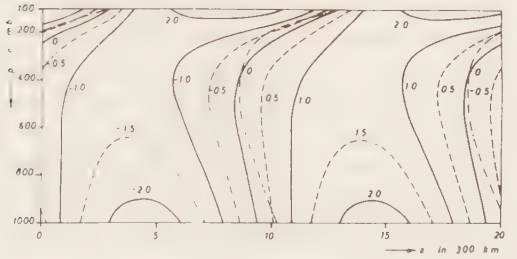

Abb. 42 Zonaler Vertikalschnitt von $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ in 10^{-2} $m^2 s^{-3}$ für $y=y_0/2$ (geostr., t=24 h)
—·—·— Rücken- bzw. Trogachse

Literaturverzeichnis

1. C h a r n e y , J.G., 1955, The use of the primitive equations of motion in the numerical prediction. Tellus 7, pp 22 - 26.
2. B o l i n , B., 1956, An improved barotropic model and some aspects of using the balance equation for three-dimensional flow. Tellus 8, pp 61 - 75.
3. H o l l m a n n , G., 1958, Zur Frage der Lärmfilterung in den hydro-thermodynamischen Gleichungen. Beitr. Phys. Atmos. 31, pp 1 - 30.
4. H o l l m a n n , G., 1966, Zur Frage neuer diagnostischer Beziehungen zwischen Wind- und Druckfeld (Balancegleichungen) in einer barotropen Atmosphäre mit divergenter Strömung.Beitr. Phys. Atmos. 39, pp 99 - 111.
5. H i n k e l m a n n , K., 1966, Das Filterproblem in der numerischen Wettervorhersage, Probl. der Wettervorhersage, Arch. f. Met. Geoph. u. Biokl., Suppl. 1, pp 74 - 87.
6. P h i l l i p s , N.A., 1960, On the problem of initial data for the primitive equations. Tellus 12, pp 121 - 126.
7. K o r b , G., 1967, Anwendungen diagnostischer Beziehungen zwischen Wind- und Druckfeld am divergent barotropen Modell. Beitr. Phys. Atmos. 40, pp 49 - 69.
8. R e i s e r , H., S c h a n z , P., 1965, On the compensation of inertial wind fields for the integration of the primitive equations. Res. Div. Germ. W.S. Final Report No AF 61 (052) - 373.
9. F j ö r t o f t , R., 1962, A numerical method of solving certain partial differential equations of second order. Geof. Publ. 24, pp 229 - 239.
10. F j ö r t o f t , R., 1960, On the integration of a system of geostrophycally balanced prognostic equations. Proceed. of Intern. Symp. on Num. Weather Pred. in Tokio, pp 153 - 159.
11. H o l l m a n n , G., 1966, Zur Dynamik der grossräumigen Luftbewegungen in äquatornahen Bereichen. Beitr. Phys. Atmos. 39, pp 37 - 49.

12. H a s e l b e r g , v., K., H i n k e l m a n n , K., 1963, On initial data filtering processes. Res. Div. Germ. W.S. Final Report No AF 61 (052)- 373.
13. Ph i l i p p s , H., 1939, Die Abweichung vom geostrophischen Wind. Met. Zeitschr. 56, pp 460 - 483.
14. C h r i s t a , R., 1966, Untersuchung einer neu formulierten Balancegleichung zweidimensionaler divergenzfreier Strömungen. Diplomarbeit am Inst. f. Theoret. Meteorologie d. Univ. München.
15. H o l l m a n n , G., 1962-64, Vorlesungen über Theoretische Meteorologie (Skriptum). München.
16. E r t e l , H., 1942, Ein neuer hydrodynamischer Erhaltungssatz. Die Naturwissenschaften.
17. Z u r m ü h l , R., 1961, Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Springer-Verlag-Berlin,Göttingen,Heidelberg.
18. M i y a k o d a , K., 1960, Test of convergence speed of iterative methods for solving two and three dimensional elliptic-type differential equations. J. Met. Soc. Japan, Series II, 38, pp 107 - 124.
19. Y o u n g , D., 1954, Iterative methods for solving partial differential equations of elliptic type. Trans. Amer. Math. Soc. 76, pp 92 - 111.
20. F r a n k e l , S.P., 1950, Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations. Math. of Comp. 4, pp 65 - 75.
21. F o r s y t h e , G.E., W a s o w , W.R., 1960, Finite-difference methods for partial differential equations. John Wiley - New York, London.
22. P h i l l i p s , N.A., 1960, Numerical Weather Prediction. Adv. in Computers, 1, pp 43 - 90.
23. T i e d t k e , M., 1968, Numerische Experimente mit einem Fünfschichtenmodell unter Berücksichtigung der Zufuhr von latenter und fühlbarer Wärme. Dissertation Univ. München.
24. C o l l a t z , L., 1960, The numerical treatment of differential equations. Springer-Verlag-Berlin, Göttingen, Heidelberg.
25. I s a a c s o n , E., K e l l e r , H.B., 1966, Analysis of numerical methods. John-Wiley-New York, London, Sydney.

26. H i n k e l m a n n , K., 1955, Ein Beitrag zur Theorie der Zyklonenentwicklung. Ber. DWD Nr. 22, pp 92 - 107.
27. H i n k e l m a n n , K., 1959, Ein numerisches Experiment mit den primitiven Gleichungen. The atmosphere and the sea in motion, pp 486 - 500. The Rockefeller Institute Press - New York.
28. D e i s e n h o f e r , H.-E., 1965, Ein numerisches Experiment zur Untersuchung des Einflusses der latenten Wärme auf barokline Entwicklungen. Diplomarbeit am Institut für Theoretische Meteorologie der Universität München.
29. M a r c h u k , G.I. u.a., 1965, Operational quasigeostrophic method of short range forecasting for five levels of the atmosphere. Isw. Phys. Atm. Ozean. 1, pp 129 - 135.
30. G a r a b e d i a n , P.R., 1964, Partial differential equations. John Wiley - New York, London, Sydney.
31. C o u r a n t , R., H i l b e r t , D., 1962, Methods of mathematical physics. Vol. II.
32. M a t s u m o t o , S., 1956, Vertical structure of disturbances in a baroclinic atmosphere. Pap. Met. Geoph. 7, pp 179 - 210.
33. H i n k e l m a n n , K., 1962, Noncharacteristic filtering of meteorological noise waves. Beitr. Phy. Atmos. 35, pp 252 - 276.
34. B r u n t , D., D o u g l a s , C.M.K., 1928, The modification of the strophic balance for changing pressure distribution,and its effects on rainfall. Mem. Roy. Met. Soc. 3, 29.
35. P o l o z k i i , G.N., 1965, The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics. Pergamon Press - Oxford, London,u.a.
36. A l b r e c h t , J., 1961, Monotone Iterationsfolgen und ihre Verwendung zur Lösung linearer Gleicnungssysteme. Num. Math. 3, pp 345 - 358.
37. V a r g a ,R.S., 1962, Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Lebenslauf

Am 31. Juli 1940 wurde ich, Dieter F r ü h w a l d , als Sohn des Lehrers Andreas F r ü h w a l d und seiner Ehefrau Margarete in Veitsbronn im Landkreis Fürth/Bay. geboren. In meinem Heimatort Veitsbronn besuchte ich von 1946 bis 1950 die Volksschule und war dann anschließend bis zum Abitur im Jahre 1959 Schüler der Oberrealschule Fürth/Bay. Im Wintersemester 1959/60 immatrikulierte ich mich an der Universität Erlangen als Student der Mathematik und Physik. Nach bestandener Vorprüfung für das Höhere Lehramt in Mathematik und Physik studierte ich seit dem Wintersemester 1962/63 an der Universität München Meteorologie. Im Jahre 1965 beendete ich mein Studium mit der Ablegung der Diplomprüfung für Meteorologie. Seit November 1965 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Meteorologie der Universität München tätig.